

GTA | Guião de Trabalho Autónomo n.º 5

MATEMÁTICA A 12.º ANO

Tema 1: Probabilidades e Cálculo Combinatório Subtema 1: Problemas de contagem



PORQUÊ APRENDER SOBRE...?



O QUE VOU APRENDER?



COMO VOU APRENDER?



O QUE APRENDI?



COMO POSSO COMPLEMENTAR A
APRENDIZAGEM?



PORQUÊ APRENDER SOBRE...?

Problemas de contagem

O que é um anagrama? E que relação tem com a matemática? Já sabes o que são Permutações? E o que é o fatorial de um número inteiro não negativo?

Vem descobrir!



O QUE VOU APRENDER?

Cálculo combinatório:

- 1) Resolver problemas de contagem.
- 2) Utilizar o Princípio Fundamental de Contagem.
- 3) Resolver problemas envolvendo arranjos com e sem repetição.
- 4) Resolver problemas envolvendo permutações e fatorial de um número inteiro não negativo.



COMO VOU APRENDER?

GTA 1: Em que consiste o sistema Braille?

GTA 2: O que é o Princípio Fundamental de Contagem?

GTA 3: O que são Arranjos com e sem repetição?

GTA 4: O que são permutações?

GTA 5: O que são permutações e fatorial de um número inteiro não negativo?

Tema 1: Probabilidades e Cálculo combinatório

Subtema 1: Problemas de contagem



GTA 5: O que são permutações e fatorial de um número inteiro não negativo?

Objetivo: Resolver problemas com permutações e fatorial de um número inteiro não negativo.

Modalidade de trabalho: pares ou pequenos grupos.

Recursos e materiais: caderno diário, manual escolar e internet.

TAREFA 1: O que é um anagrama?

Visualiza o [vídeo](#) da RTP Ensina e regista informação sobre o que é o anagrama.

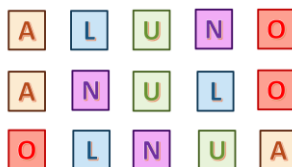


[Anagramas](#)

Exemplo 1:

Quantos anagramas existem da palavra **ALUNO**?

Observa, por exemplo:



Um anagrama de uma palavra é qualquer sequência, com ou sem significado, obtida pela troca da ordem das suas letras.

Por exemplo, ANULO é uma palavra com significado, mas OLNUA não é. Porém, ambas são anagramas da palavra ALUNO.

Já sabes responder? Pretende-se as permutações de 5 elementos:

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Assim, podes concluir que existem 120 anagramas diferentes com as letras da palavra aluno.



Exemplo 2:

Quantos anagramas da palavra **ANAGRAMA** existem?



Se as letras fossem todas diferentes seria $P_8 = 8!$

No entanto, as trocas de posição entre as letras A não alteram a palavra obtida. Assim, para cada anagrama existem $4!$ configurações iguais.

Então:

$$\frac{8!}{4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times \boxed{4 \times 3 \times 2 \times 1}}{4!} = \frac{1680 \times \boxed{4!}}{4!} = 1680$$

Existem **1680** anagramas diferentes com as letras da palavra **ANAGRAMA**.

TAREFA 2: No teu manual escolar

Procura informação, no teu manual escolar, sobre o tema “**Fatorial de um número inteiro não negativo**” e **copia** a definição para o teu caderno diário:

$$n! = n \times \underbrace{(n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1}_{(n-1)!} = n \times (n-1)!$$

$$n! = n \times (n-1) \times \underbrace{(n-2) \times \dots \times 2 \times 1}_{(n-2)!} = n \times (n-1) \times (n-2)!$$

Exemplos de simplificação:

$$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4!$$

$$\frac{15!}{13!} = \frac{15 \times 14 \times 13!}{13!} = 15 \times 14 = 210$$

$$\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1) \times n!} = \frac{1}{n+1}$$

Resolve sozinho as tarefas seguintes. Por fim, **compara** a tua resolução com a dos teus colegas.

TAREFA 3: Batata?

Quantos anagramas da palavra **BATATA** existem?





TAREFA 4: Mais cartas?

Considera um baralho incompleto com 20 cartas. Retiram-se 8 cartas desse baralho e colocam-se, lado a lado, numa mesa.

Quantas disposições diferentes podemos obter?

TAREFA 5: Conheces as salinas de Rio Maior?

Algumas salinas têm a configuração de um grande retângulo reticulado.

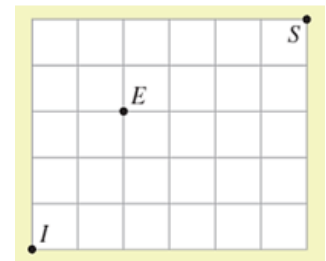
Os trabalhadores caminham sobre troços que separam os tanques de sal.

Considera o esquema que representa a salina onde trabalham o Ivo e o Sebastião.

O Ivo encontra-se no ponto I e pretende ir ter com o Sebastião que se encontra no ponto S .

Quantos percursos diferentes pode o Ivo fazer:

- sem nunca voltar para trás?
- sem passar pelo encarregado que se encontra no ponto E ?



Depois de resolveres a tarefa, **visualiza** o vídeo e **fica a conhecer** as [Salinas de Rio Maior](#).

Visualiza também o recurso de Geografia A e **fica a perceber** o “[Estudo de caso: salinas de Rio Maior](#)”:

TAREFA 6: No caderno diário

Autoavalia o que aprendeste, registando e explicando o teu raciocínio.

Na figura ao lado, está representado um tabuleiro com 16 casas, dispostas em quatro filas horizontais (A, B, C e D) e em quatro filas verticais (1, 2, 3 e 4).

	1	2	3	4
A				
B				
C				
D				

Pretende-se dispor nove fichas numeradas de 1 a 9 no tabuleiro, de modo que cada ficha ocupe uma única casa e que cada casa não seja ocupada por mais do que uma ficha. De quantas maneiras diferentes é possível dispor as nove fichas, de tal forma que as que têm número par ocupem uma única fila horizontal?

Adaptado de Exame Nacional 12.º ano, 2016 - 2.ª Fase, IAVE



PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

TAREFA 3: Batata?

As trocas de posição entre as 3 letras A e entre as 2 letras T não alteram a palavra obtida. Para cada anagrama existem $3! \times 2!$ configurações repetidas. Então:

$$\frac{6!}{3! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times \boxed{3 \times 2 \times 1}}{3! \times 2!} = \frac{120 \times \boxed{3!}}{3! \times 2!} = 60$$

Existem 60 anagramas diferentes com as letras da palavra BATATA.

TAREFA 4: Mais cartas?

Pretende-se o número de sequências de 8 cartas retiradas de um baralho com 20.

$$\underbrace{20 \times 19 \times \dots \times 13}_{8 \text{ fatores}} = 5\,079\,110\,400$$

Mas, sabemos que:

$$20 \times 19 \times \dots \times 13 = \frac{20 \times \dots \times 13 \times 12 \times 11 \times \dots \times 1}{12 \times 11 \times \dots \times 1} = \frac{20!}{12!} = \frac{20!}{(20-8)!} = {}^{20}A_8$$

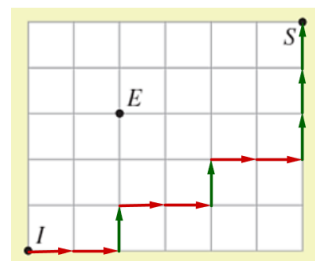
TAREFA 5: Conheces as salinas de Rio Maior?

a) Para simplificar, vamos considerar:

Por exemplo, **DDDDDDCCCC** ou **DDCDDCDDCCC**.

D → traço horizontal para a direita

C → traço vertical para cima



O Ivo tem de percorrer seis traços **D** e cinco traços **C**.

$$\frac{11!}{6! \times 5!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \boxed{6!}}{6! \times 5!} = \frac{55\,440}{120} = 462$$

O número de diferentes percursos possíveis é igual ao número de anagramas de DDDDDDDCCCCC.

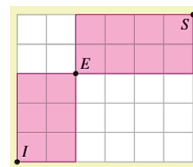


PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

b) Quantos percursos diferentes pode o Ivo fazer sem passar pelo encarregado que se encontra no ponto E ?

D → troço horizontal para a direita

C → troço vertical para cima



Contemos primeiro os percursos que passam por E :

$$\frac{5!}{2! \times 3!} \times \frac{6!}{4! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2! \times 3!} \times \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2!} = \frac{20}{2} \times \frac{30}{2} = 150$$

Como já sabemos que existem no total 462 percursos possíveis basta subtrair os percursos que não interessam, ou seja, 150.

$$462 - 150 = 312$$

Resposta: O Ivo pode fazer 312 percursos diferentes, sem passar pelo encarregado que se encontra no ponto E .

TAREFA 6: Autoavaliação

- ✓ Há 4 fichas com número par: 2, 4, 6 e 8.
- ✓ A ordem de colocação é relevante.
- ✓ Existem 4 filas horizontais e 4 posições em cada fila para colocar as fichas com um número par.
- ✓ Após a colocação das fichas com o número par, restam 12 casas do tabuleiro para colocar as 5 fichas restantes.

$$4 \times 4! \times {}^{12}A_5 = 4 \times 24 \times \frac{12!}{7!} = 9\,123\,840$$

Resposta: É possível dispor as nove fichas de 9 123 840 formas diferentes, de tal forma que as que têm número par ocupem uma única fila horizontal.



O QUE APRENDI?

Já sabes em que consistem as permutações?

Já sabes em que consiste o fatorial de um número inteiro não negativo?

Consegues resolver as tarefas sem ajuda?

Ainda tens dúvidas?

Analisa as tuas propostas de resolução. Se necessário repete a resolução das tarefas.

Procura no teu manual escolar os exercícios resolvidos sobre o tema “Permutações e fatorial de um número inteiro não negativo”. **Analisa-os** e **resolve** sozinho. Por fim, **compara** a tua resolução com a do manual e com as dos teus colegas.

Reforça as aprendizagens, realizando novamente as atividades propostas no respetivo guião.



COMO POSSO COMPLEMENTAR A APRENDIZAGEM?

Explora a sugestão de recursos para complementares a tua aprendizagem ou esclareceres dúvidas.

Em estudoemcasaapoia.dge.mec.pt:

[Videoaula 2 | Arranjos e permutações](#)

[Videoaulas 3 | Arranjos com e sem repetição. Permutações e fatorial de um número inteiro não negativo](#)

[Cálculo combinatório: permutações](#)

Outros recursos:

[lave.pt](#)

[Khan Academy](#)