REPÚBLICA PORTUGUESA | EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO
direção-geral da educação
Estudo Autónomo

GTA | Guião de Trabalho Autónomo n.º 1

DISCIPLINA
11.º ANO

Tema 1: Geometria
Subtema 1: Trigonometria do triângulo retângulo

PORQUÊ APRENDER SOBRE...?

O QUE VOU APRENDER?

COMO VOU APRENDER?

O QUE APRENDI?

COMO POSSO COMPLEMENTAR A APRENDIZAGEM?

PORQUÊ APRENDER SOBRE...?

Trigonometria

A trigonometria desenvolveu-se, essencialmente, por questões práticas, ligadas à astronomia, à agrimensura (arte de medir campos ou propriedades rurais) e à navegação, pois permite calcular distâncias que não podem ser medidas diretamente.

Vem descobrir mais!

O QUE VOU APRENDER?

Trigonometria

- Resolver problemas variados, ligados a situações concretas, que permitam recordar e aplicar métodos trigonométricos estudados no 3.º ciclo do ensino básico;
- Conhecer as relações entre as razões trigonométricas de um mesmo ângulo agudo.

COMO VOU APRENDER?

GTA 1: Trigonometria para quê?

GTA 2: A navegação e a trigonometria

GTA 3: Razões trigonométricas do triângulo retângulo

Tema 1: Geometria

Subtema 1: Trigonometria do triângulo retângulo

GTA 1: Trigonometria para quê?

Objetivo:

- Resolver problemas variados, ligados a situações concretas, que permitam recordar e aplicar métodos trigonométricos estudados no 3.º ciclo do ensino básico.

Modalidade de trabalho: pares ou pequenos grupos.

Recursos e materiais: caderno diário, manual escolar, calculadora gráfica ou científica e *internet*.

A trigonometria desenvolveu-se, essencialmente, por questões práticas, ligadas à astronomia, à agrimensura (arte de medir campos ou propriedades rurais) e à navegação, pois permite calcular distâncias que não podem ser medidas diretamente.

Na navegação, tanto o quadrante náutico como o astrolábio, permitem saber se a embarcação se encontrava mais a norte ou mais a sul, como estes exemplares do Museu de Marinha, em Lisboa:

Quadrante com Nónio *low* (MM.06344)

Astrolábio "Aveiro" (MM.05255)

Esses cálculos envolvem trigonometria. Estes instrumentos de navegação permitiram, aos portugueses, visitar outros continentes impulsionando assim os Descobrimentos.

Visualiza o vídeo com os marinheiros do Navio Escola Sagres, da Marinha Portuguesa.

Regista, no teu caderno, a informação náutica proferida pelos marinheiros. Como são obtidas estas informações?

Vídeo, RTP Açores

Lembras-te quais são as razões trigonométricas de um ângulo agudo, num triângulo retângulo?

Considera a figura 1, onde está representado o triângulo $[ABC]$ retângulo em A:

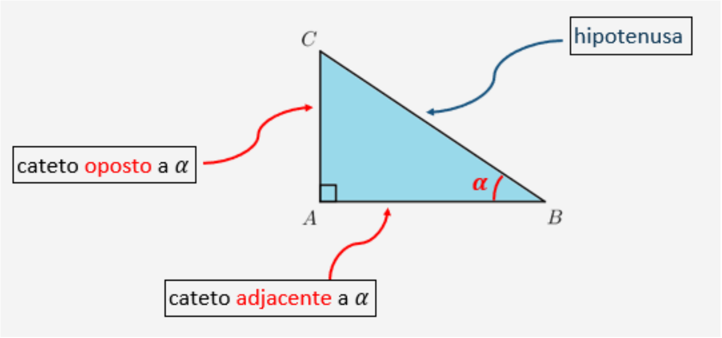


Figura 1 – Triângulo $[ABC]$ retângulo em A

Sendo α um ângulo agudo interno do triângulo retângulo $[ABC]$:

- o lado $[AC]$ é *o cateto oposto a* α;
- o lado $[AB]$ é *o cateto adjacente a* α;
- o lado $[BC]$ é *a hipotenusa*.

Visualiza e **recorda**, o que são e como se determinam, as razões trigonométricas de um ângulo agudo explorando este o vídeo com o [GeoGebra]().

Em síntese, considerando o triângulo $[ABC]$ retângulo em A:

- **Seno do ângulo α**

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\textit{comprimento do cateto oposto a } \alpha}{\textit{comprimento da hipotenusa}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

- **Cosseno do ângulo α**

$$\cos\alpha = \frac{\textit{comprimento do cateto adjacente a } \alpha}{\textit{comprimento da hipotenusa}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

- **Tangente do ângulo α**

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\textit{comprimento do cateto oposto a } \alpha}{\textit{comprimento do cateto adjacente a } \alpha} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

Copia a informação anterior para o teu caderno.

Exemplo 1:

Na figura 2 está representado um triângulo retângulo [ABC].

Sabe-se que:

- $\overline{BC} = 6$
- $\overline{AC} = 10$

Calcula as razões trigonométricas do:

a) ângulo α;

b) ângulo β;

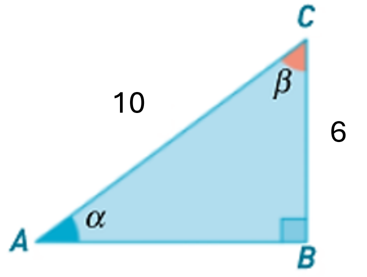


Figura 2 – Triângulo retângulo [ABC]

Proposta de resolução:

a) Aplicando o Teorema de Pitágoras temos, $\overline{AB} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$

então, $sen\ \alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ $\quad cos\ \alpha = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ $\quad tg\ \alpha = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

b) $sen\ \beta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ $\quad cos\ \beta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ $\quad tg\ \beta = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

Também podes determinar valores aproximados das razões trigonométricas de um ângulo recorrendo a uma tabela trigonométrica (**consulta** no final do teu manual escolar) ou a uma calculadora científica.

Exemplo 2:

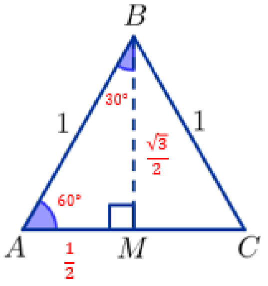
No entanto, é possível determinar valores exatos das razões de alguns ângulos. **Observa** com atenção:

Como determinar o valor exato das razões trigonométricas de $30°$ e $60°$?

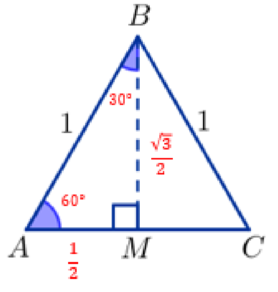
Consideremos o triângulo equilátero $[ABC]$ de lado 1.

$\overline{AM} = \frac{1}{2}$

$$\overline{BM} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Assim,



$$sen\ 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$sen\ 30° = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$cos\ 60° = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$cos\ 30° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\ 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$tg\ 30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Considera a tabela seguinte:

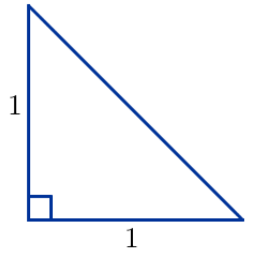
x	$30°$	$45°$	$60°$
$sen\ x$	$\frac{1}{2}$	?	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$cos\ x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	?	$\frac{1}{2}$
$tg\ x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	?	$\sqrt{3}$

Copia a informação anterior para o teu caderno e **resolve** as tarefas seguintes.

TAREFA 1:

Quais são os valores exatos das razões trigonométricas de um ângulo com $45°$?

Sugestão:
Considera um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 1.

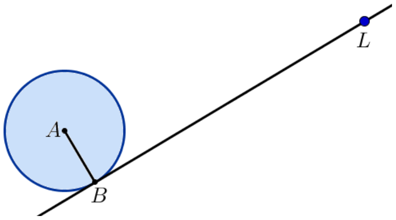


Completa a tabela anterior com os valores que obtiveste.

A trigonometria surge, também, diretamente ligada à Astronomia pela necessidade dos astrónomos efetuarem cálculos precisos. Por exemplo, medir a distância entre a Terra e a Lua foi possível recorrendo a cálculos trigonométricos.

TAREFA 2: Distância da Terra à Lua

Hiparco (190 a.C.–120 a.C.), astrónomo e matemático grego, estimou a distância da Terra à Lua, utilizando o seguinte método:



- Colocou outro observador, em E, que vê a Lua na perpendicular;
- Estimou a amplitude do arco BE em 89°;
- Determinou a distância da Terra à Lua.

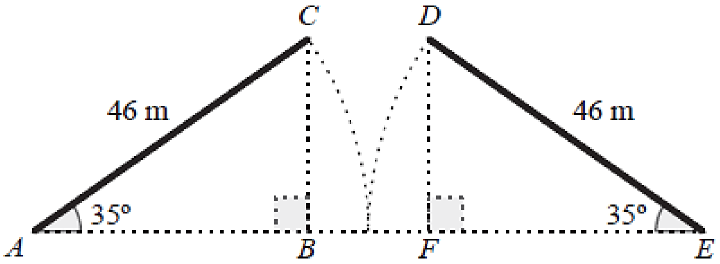
Adaptado Projeto Desafios Matemática A 11, Santillana

Agora que já relembraste o que aprendeste no 9.º ano, **autoavalia** os teus conhecimentos respondendo a esta tarefa.

TAREFA 3: A ponte móvel

No Porto de Leixões, existe uma das maiores pontes móveis do mundo.

Fonte: Revista Pontos de Vista, 14/06/2019



No esquema da figura, está representada a posição, em relação à horizontal, que as duas secções móveis da ponte ($[AC]$ e $[ED]$) tinham num certo instante.

Atendendo às informações que constam no esquema, **determina** a distância entre os pontos C e D.

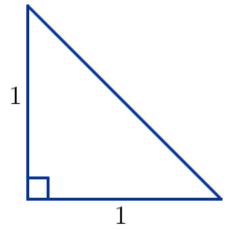
Nota: Repara que $\overline{AE} = \overline{AC} + \overline{ED}$

Adaptado Projeto Desafios Matemática A 11, Santillana

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

TAREFA 1:

Aplicando o Teorema de Pitágoras:



$$\text{hipotenusa} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$sen\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad cos\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad tg\ 45° = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

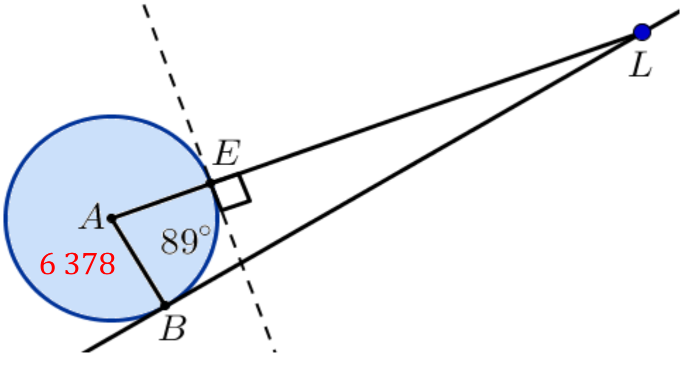
Assim,

x	30°	45°	60°
$sen\ x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$cos\ x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\ x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

TAREFA 2: Distância da Terra à Lua

Sabes que $B\hat{A}L = 89°$

Como o triângulo $[BAL]$ é retângulo em B tem-se,



$$\cos 89° = \frac{raio\ da\ Terra}{\overline{AL}} \Leftrightarrow \cos 89° = \frac{6\ 378}{\overline{AL}} \Leftrightarrow \overline{AL} = \frac{6\ 378}{\cos 89°}$$ então, $\overline{AL} \approx 365\ 451$

Para determinar a distância pedida basta subtrair o raio da Terra

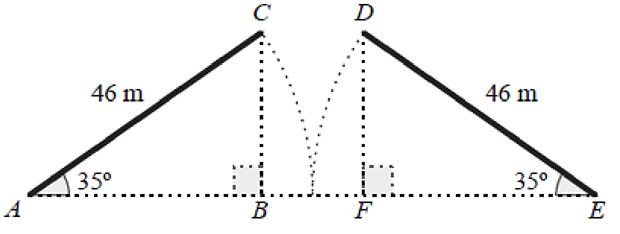
$$365\ 451 - 6\ 378 \approx 359\ 073$$

Então, Hiparco concluiu que a distância da Terra à Lua era, aproximadamente, 359 073 km.

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

É muito interessante comparar este valor com aquele que é conhecido hoje em dia para esta distância (384 405 km). Apesar de tecnicamente correto, o método de Hiparco não permite obter a distância correta. O erro atribui-se às incorreções nas medidas dos **ângulos.**

TAREFA 3:



Como o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B, tem-se:

$\cos 35° = \frac{\overline{AB}}{46} \Leftrightarrow \overline{AB} = 46\cos 35°$ logo, também $\overline{FE} = 46\cos 35°$

Assim, $\overline{AE} = 46\cos 35° + 46\cos 35° + \overline{CD} \Leftrightarrow \overline{AE} = 92\cos 35° + \overline{CD}$

Então, como $\overline{AE} = \overline{AC} + \overline{ED} = 46 + 46 = 92$ tem-se,

$92 = 92\cos 35° + \overline{CD} \Leftrightarrow \overline{CD} = 92 - 92\cos 35°$

A distância entre C e D, arredondada às unidades, é de 17 metros.

Nota:

Repara que nos cálculos intermédios não foram feitas aproximações.

Se fizermos a aproximação apenas no resultado final o erro cometido é menor, pois não fomos acumulando várias aproximações ao longo da resolução.

Deste modo, o valor obtido estará mais próximo do valor real.

O QUE APRENDI?

Já sabes resolver problemas envolvendo a trigonometria?

És capaz de...

- identificar as razões trigonométricas de um ângulo agudo?
- calcular os valores exatos das razões trigonométricas de um ângulo com $30°, 45°\ e\ 60°$?

Consegues resolver as tarefas sem ajuda?
Ainda tens dúvidas?

Se tiveres dúvidas, **visualiza** a videoaula 1 onde encontras os exercícios explicados.

Procura no teu manual escolar os exercícios resolvidos sobre o tema "Trigonometria". **Analisa-os** e **resolve** sozinho. Por fim, **compara** a tua resolução com a do manual e com as dos teus colegas.

Estuda com um colega de turma, para consolidares a tua aprendizagem.

COMO POSSO COMPLEMENTAR A APRENDIZAGEM?

Explora a sugestão de recursos para complementares a tua aprendizagem ou esclareceres dúvidas.

Em estudoautonomo.dge.mec.pt:

Videoaula 2 | Triângulos e razões

Videoaula 3 | Problemas envolvendo razões trigonométricas de um ângulo agudo

Razões trigonométricas

Outros recursos:

Iave.pt

Khan Academy