REPÚBLICA PORTUGUESA | EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO

direção-geral da educação

Estudo Autónomo

GTA | Guião de Trabalho Autónomo n.º 3

DISCIPLINA
11.º ANO

Tema 1: Geometria

Subtema 1: Trigonometria do triângulo retângulo

PORQUÊ APRENDER SOBRE...?

O QUE VOU APRENDER?

COMO VOU APRENDER?

O QUE APRENDI?

COMO POSSO COMPLEMENTAR A APRENDIZAGEM?

PORQUÊ APRENDER SOBRE...?

Trigonometria

Vem recordar as razões trigonométricas de um mesmo ângulo agudo. Assim, podes resolver problemas variados e aplicar diferentes métodos de resolução.

Vem descobrir!

O QUE VOU APRENDER?

Trigonometria

- Resolver problemas variados, ligados a situações concretas, que permitam recordar e aplicar métodos trigonométricos estudados no 3.º ciclo do ensino básico;
- Conhecer as relações entre as razões trigonométricas de um mesmo ângulo agudo.

COMO VOU APRENDER?

GTA 1: Trigonometria para quê?

GTA 2: A navegação e a trigonometria

GTA 3: Razões trigonométricas do triângulo retângulo

Tema 1: Geometria

Subtema 1: Trigonometria do triângulo retângulo

GTA 3: Razões trigonométricas do triângulo retângulo

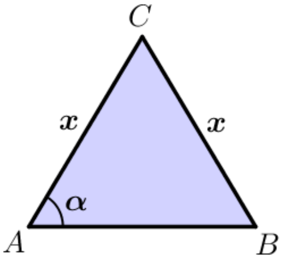
Objetivo:

- Resolver problemas variados, ligados a situações concretas, que permitam recordar e aplicar métodos trigonométricos estudados no 3.º ciclo do ensino básico.
- Conhecer as relações entre as razões trigonométricas de um mesmo ângulo agudo.

Modalidade de trabalho: pares ou pequenos grupos.

Recursos e materiais: caderno diário, manual escolar, calculadora gráfica ou científica e *internet*.

TAREFA 1: Triângulo isósceles



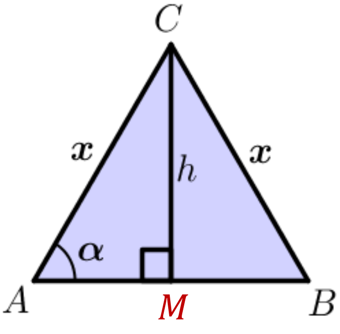
Considera um triângulo $[ABC]$ isósceles, tal que:

- $\overline{AC} = \overline{CB} = x$
- $C\hat{A}B = \alpha$

Prova que a área do triângulo $[ABC]$ é dada por:

$$x^2 \text{sen}\, \alpha \cos \alpha$$

Proposta de resolução:



Recorda que, a área de um triângulo é dada pela expressão:

$$\text{Área:} \quad \frac{base \times altura}{2} = \frac{\overline{AB} \times h}{2}$$

$$sen\ \alpha = \frac{h}{x} \Leftrightarrow h = x\ sen\ \alpha \quad \text{e} \quad \cos \alpha = \frac{\overline{AM}}{x} \Leftrightarrow \overline{AM} = x \cos \alpha$$

Então, $\overline{AB} = 2\,\overline{AM} = 2x \cos \alpha$

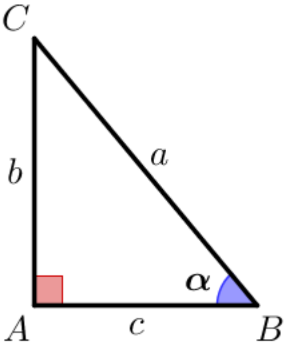
$$\text{Área:} \quad \frac{2x \cos \alpha \times x\ sen\ \alpha}{2} = x^2 sen\ \alpha \cos \alpha$$

Copia, para o teu caderno a tarefa que acabaste de explorar. **Identifica,** a cada passo da proposta de resolução, os catetos e a hipotenusa de cada um dos triângulos [AMC] e [BMC].

Abre o teu manual e **procura** sobre o tema "Relações entre as razões trigonométricas de um ângulo agudo".

Copia para o teu caderno a exploração seguinte, incluindo os exemplos 1 e 2.

Considera o triângulo retângulo onde temos um ângulo interno agudo α e onde os lados medem a, b e c como se pode ver na figura.



$$\text{sen}\,\alpha = \frac{b}{a} \qquad \cos\alpha = \frac{c}{a} \qquad \text{tg}\,\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c} = \text{tg}\,\alpha$$

Então, $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$

Pelo Teorema de Pitágoras tem-se,

$$b^2 + c^2 = a^2 \Leftrightarrow \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1$$

Então, $\boxed{(\text{sen}\,\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1}$ Fórmula fundamental da trigonometria

Exemplo 1: Quando conheces apenas uma das razões trigonométricas de um ângulo agudo

Relativamente a um ângulo agudo β, sabe-se que $\text{sen}\,\beta = \frac{2}{3}$.
Determina as outras razões trigonométricas de β.

Proposta de resolução:

Já sabes que, $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$ e $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Como $\text{sen}\,\beta = \frac{2}{3}$ tem-se, $\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2\beta = 1 \Leftrightarrow \cos^2\beta = 1 - \frac{4}{9} \Leftrightarrow \cos^2\beta = \frac{5}{9}$

Como o cosseno de um ângulo agudo é um número positivo, obtém-se

$$\cos\beta = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \qquad \text{e então,} \qquad \text{tg}\,\beta = \frac{sen\,\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Resposta: $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ e $\text{tg}\,\beta = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

E se conhecermos apenas a tangente do ângulo? Como podes determinar as outras razões trigonométricas desse ângulo?
Neste caso, necessitas de uma fórmula que relacione a tangente apenas com uma das outras razões.

Já sabes que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos \alpha}$ e $sen^2\alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$sen^2\alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{sen^2\alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \left(\frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\operatorname{tg} \alpha)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Então, $tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

Exemplo 2: Quando conheces apenas a tangente de um ângulo agudo

Sabendo que um ângulo agudo θ é tal que $\operatorname{tg} \theta = 2$, **determina**:

a) $\cos \theta$

b) $sen\ \theta$

Proposta de resolução:

a) Como $\operatorname{tg} \theta = 2$ tem-se:

$$2^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow 5 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{5}$$ e então, $\cos \theta = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

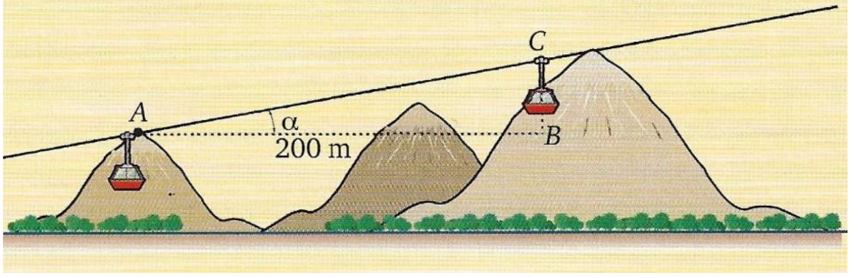
b) Tendo em conta que $\operatorname{tg} \theta = \frac{\text{sen}\ \theta}{\cos \theta}$ tem-se que,

$$2 = \frac{\text{sen}\ \theta}{\frac{\sqrt{5}}{5}} \Leftrightarrow \text{sen}\ \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Procura no teu manual escolar os exercícios resolvidos sobre o tema "Trigonometria". **Analisa-os** e **resolve** sozinho. Por fim, **compara** a tua resolução com a do manual e com as dos teus colegas.

TAREFA 2: Autoavalia o que aprendeste

ITEM 1:



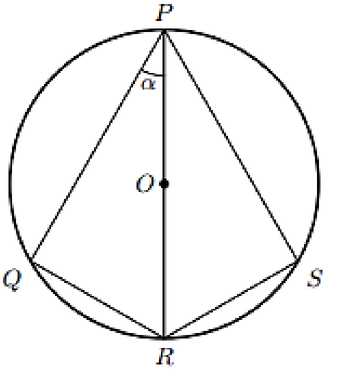
Relativamente à figura sabe-se que:

- α é um ângulo agudo do triângulo retângulo $[ABC]$
$$\text{sen } \alpha = 0{,}6$$
- a distância do ponto A ao ponto B é de 200 metros
- o ponto A encontra-se a 20 metros do chão

A que altura do chão se encontra o teleférico representado pelo ponto C?

Adaptado de Aleph 11, Asa

ITEM 2:



Na figura, estão representados uma circunferência de centro O e raio 2 e os pontos P, Q, R e S.
Sabe-se que:

- os pontos P, Q, R e S pertencem à circunferência;
- $[PR]$ é um diâmetro da circunferência;
- $\overline{PQ} = \overline{PS}$;
- α é a amplitude, em graus, do ângulo QPR;
- o ângulo de amplitude α é agudo.

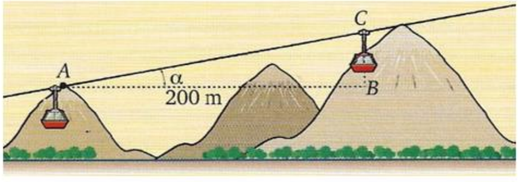
a) **Mostra** que a área do quadrilátero $[PQRS]$, é dada pela expressão $16 \text{ sen } \alpha \cos \alpha$.

b) **Determina** o valor exato da área do quadrilátero $[PQRS]$ admitindo que $\text{tg } \alpha = 2\sqrt{2}$.

Adaptado de Exame Nacional 12.º ano, 2014 - 2.ª Fase, IAVE

TAREFA 2

ITEM 1: Proposta de resolução

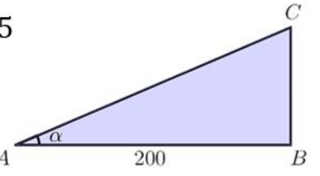


$\text{sen}\,\alpha = 0{,}6$ e $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$0{,}6^2 + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - 0{,}36$

Então, como o cosseno de um ângulo agudo é um número positivo

$\cos\alpha = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$ e então $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$



Assim,

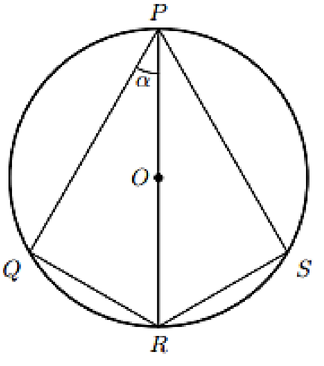
$$tg\ \alpha = 0{,}75 \Leftrightarrow \frac{\overline{BC}}{200} = 0{,}75 \Leftrightarrow \overline{BC} = 150$$

Logo, basta calcular $150 + 20 = 170$

Resposta: A cadeira C encontra-se a uma altura de 170 metros.

ITEM 2: Proposta de resolução

a) Mostra que a área do quadrilátero $[PQRS]$, é dada pela expressão
$16\ \text{sen}\ \alpha\cos\alpha$



O triângulo $[PQR]$ é retângulo em Q pois
está inscrito numa semicircunferência e $\overline{PR} = 4$.
Então,

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\overline{QR}}{4} \Leftrightarrow \overline{QR} = 4\ \text{sen}\ \alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{PQ}}{4} \Leftrightarrow \overline{PQ} = 4\cos\alpha$$

A área do quadrilátero $[PQRS]$ é o dobro da área do triângulo $[PQR]$, então:

$$A_{[PQRS]} = 2 \times \frac{4\ sen\ \alpha \times 4\cos\alpha}{2} = \ 16\ sen\ \alpha\cos\alpha$$

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

b) Determina o valor exato da área do quadrilátero $[PQRS]$ admitindo que $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{2}$.

Recorda que, $tg^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$

$\left(2\sqrt{2}\right)^2 + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 8 + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \dfrac{1}{9}$ então $\cos \alpha = \dfrac{1}{3}$

$tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{\cos \alpha}$ então $2\sqrt{2} = \dfrac{sen\ \alpha}{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \text{sen } \alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$$A_{[PQRS]} = 16 \text{ sen } \alpha \cos \alpha = 16 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{32\sqrt{2}}{9}$$

O QUE APRENDI?

Já sabes resolver problemas envolvendo a trigonometria?

Consegues resolver as tarefas sem ajuda?

Ainda tens dúvidas?

Se tiveres dúvidas, **visualiza** a Videoaula 2 | Triângulos e razões onde encontras os exercícios explicados.

Procura no teu manual escolar os exercícios resolvidos sobre o tema “Trigonometria”. **Analisa-os** e **resolve** sozinho. Por fim, **compara** a tua resolução com a do manual e com as dos teus colegas.

Estuda com um colega de turma, para consolidares a tua aprendizagem.

COMO POSSO COMPLEMENTAR A APRENDIZAGEM?

Explora a sugestão de recursos para complementares a tua aprendizagem ou esclareceres dúvidas.

Em estudoautonomo.dge.mec.pt:

Videoaula 3 | Problemas envolvendo razões trigonométricas de um ângulo agudo

Razões trigonométricas

Outros recursos:

Iave.pt

Khan Academy