REPÚBLICA PORTUGUESA | EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO

direção-geral da educação

Estudo Autónomo

GTA | Guião de Trabalho Autónomo n.º 8

DISCIPLINA
12.º ANO

Tema 1: Probabilidades e Cálculo Combinatório
Subtema 2: Cálculo Combinatório

PORQUÊ APRENDER SOBRE...?

O QUE VOU APRENDER?

COMO VOU APRENDER?

O QUE APRENDI?

COMO POSSO COMPLEMENTAR A APRENDIZAGEM?

PORQUÊ APRENDER SOBRE...?

Cálculo combinatório.

Neste guião, propomos que resolvas problemas envolvendo o cálculo combinatório.

Estás preparado(a)? Vem descobrir!

O QUE VOU APRENDER?

Cálculo combinatório:

1) Resolver problemas envolvendo o Cálculo combinatório.

2) Resolver problemas envolvendo:

2.1 o Triângulo de Pascal e as suas propriedades.

2.2 o desenvolvimento do Binómio de Newton.

COMO VOU APRENDER?

GTA 6: Qual o melhor sumo de fruta?

GTA 7: Resolução de problemas.

GTA 8: Resolução de problemas.

GTA 9: Newton ou Pascal?

Tema 1: Probabilidades e Cálculo combinatório

Subtema 2: Cálculo Combinatório

GTA 8: Resolução de problemas

Objetivo: Resolver problemas envolvendo cálculo combinatório
Modalidade de trabalho: pares ou pequenos grupos.
Recursos e materiais: caderno diário, manual escolar, um baralho de 52 cartas e *internet*.

TAREFA 1: Par ou ímpar?

Considera nove bolas, quatro numeradas com o número 1, quatro com o número 2 e uma com o número 4.

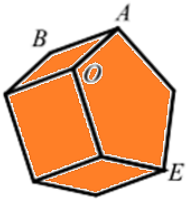
Considera agora que se colocam as nove bolas lado a lado, de modo a formar um número com nove algarismos.

Quantos **números ímpares** diferentes se podem obter?

Adaptado de Exame Nacional 12.º ano – 2016, 1.ª Fase, IAVE

Pensa numa estratégia de resolução e compara-a com as estratégias dos teus colegas.

TAREFA 2:



Na figura ao lado está representado um prisma pentagonal regular em que quatro dos seus vértices estão designados pelas letras A, B, E e O.

Pretende-se designar os **restantes seis** vértices do prisma, utilizando as 23 letras do alfabeto português.

De quantas maneiras diferentes podemos designar esses seis vértices, de tal modo que **os cinco vértices de uma das bases sejam designados pelas cinco vogais**?

Adaptado de Teste Intermédio 12.º ano – 2009, IAVE

TAREFA 3:

Considera um baralho com 52 cartas repartidas por 4 naipes (copas, ouros, espadas e paus). Em cada naipe, há um ás, três figuras (uma dama, um valete, um rei) e mais 9 cartas (do dois ao dez).

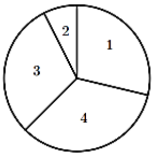
Retiram-se 5 cartas do baralho, que são colocadas lado a lado, em cima de uma mesa, segundo a ordem pela qual vão sendo retiradas.

Quantas sequências se podem formar com as 5 cartas retiradas, caso **a primeira carta e a última carta sejam ases, e as restantes sejam figuras**?

Adaptado de Exame Nacional 12.º ano – 2009, 2.ª Fase, IAVE

TAREFA 4:

Na figura ao lado está representado um círculo dividido em 4 setores circulares diferentes, numerados de 1 a 4.



Existem **5 cores** para pintar o círculo, de modo que:

- todos os setores devem ser pintados com uma única cor;
- setores com um raio em comum não podem ficar pintados com a mesma cor;
- o círculo deve ficar pintado com **2 ou com 4 cores**.

De quantas maneiras diferentes pode o círculo ser pintado?

Adaptado de Teste Intermédio 12.º ano – 2008, IAVE

TAREFA 5:

O código de acesso a uma conta de *e-mail* é constituído por quatro letras e três algarismos.

Sabe-se que um código tem quatro «a», dois «5» e um «2», como por exemplo, o código 2aa5a5a.

Quantos códigos diferentes existem nessas condições?

Adaptado de Exame Nacional 12.º ano – 2012, 2.ª fase, IAVE

TAREFA 6:

A Ana e o Bruno vão disputar entre si um torneio de xadrez com 10 partidas.

Cada partida pode terminar com a vitória de um deles ou com um empate.
Vence o torneio quem ganhar mais partidas.

No final de cada partida é registado o resultado, por meio de uma letra

A – vitória da Ana   B - vitória do Bruno   E - empate

Deste modo, um exemplo de registo ao fim das 10 partidas pode ser

A E A B B E E A B E

Quantos registos diferentes poderão acontecer, de tal forma que haja **exatamente 7 empates e a Ana seja a vencedora do torneio**?

Adaptado de Exame Nacional de 12.º ano – 2004, Época especial, IAVE

TAREFA 7:

Considera todos os números naturais superiores a 9 999 e inferiores a 22 000.
Destes números, quantos se podem escrever com os algarismos 0, 1, 2 e 3?

(A) 192   (B) 236   (C) 384   (D) 512

Exame Nacional de 12.º ano – 2020, 2.ª fase, IAVE

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

TAREFA 1: Quantos **números ímpares** se podem obter?

Para ser ímpar o último algarismo tem de ser 1 (único algarismo ímpar).
Logo, as restantes bolas só podem estar nas 8 primeiras posições.

$^{8}C_4 \rightarrow$ n.º de formas de escolher 4 das 8 posições para as bolas com o n.º 2 (a ordem não é relevante, pois as bolas são iguais).

$^{4}C_3 \rightarrow$ n.º de formas de, arrumadas as bolas com o n.º 2, escolher 3 posições das 4 que restam, para as bolas com o n.º 1.

Colocadas todas as bolas, exceto a que tem o n.º 4, existe apenas uma posição possível para esta: $^{8}C_4 \times {}^{4}C_3 \times {}^{1}C_1 = 70 \times 4 \times 1 = 280$

Nestas condições, existem 280 números ímpares.

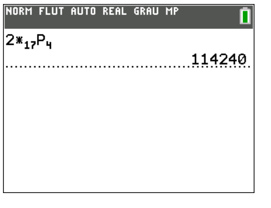
TAREFA 2:

Uma das bases já tem 3 vogais posicionadas, então, só existem 2 formas para colocar as outras 2 vogais.

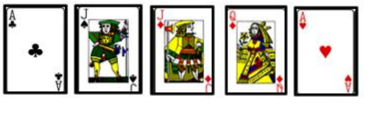
Na outra base existem 4 vértices para designar e $23 - 5 - 1 = 17$ letras disponíveis.
Ou seja, existem $^{17}A_4$ disposições diferentes (a ordem é relevante):

$$2 \times {}^{17}A_4 = 114\ 240$$

Existem 114 240 maneiras diferentes de designar os seis vértices.



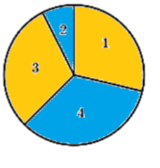
TAREFA 3:
Pretende-se uma sequência do tipo:



No total, têm-se 4 ases para 2 posições e 12 figuras para 3 posições, interessando a ordem: $^{4}A_2 \times {}^{12}A_3 = 12 \times 1\ 320 = 15\ 840$

Existem 15 840 sequências nas condições do enunciado.

TAREFA 4:



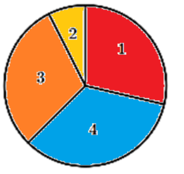
Pintar com 2 cores
O setor 1 pode ser pintado com qualquer uma das 5 cores disponíveis e o setor 2, porque tem um raio em comum, pode ser pintado com apenas 4 das cores disponíveis.

O setor 3 tem de ter a mesma cor que o setor 1 e o setor 4 a mesma do setor 2:

$$5 \times 4 \times 1 \times 1 = 20$$

Pintar com 4 cores

Das 5 cores disponíveis, selecionam-se 4, uma para cada setor, sendo a ordem relevante porque os setores são diferentes:



$$^{5}A_4 = 120$$

Então: $20 + 120 = 140$

Existem 140 maneiras diferentes de colorir o círculo nas condições do enunciado.

TAREFA 5:

Estratégia de resolução 1

Sabe-se que um código tem quatro «a», dois «5» e um «2», como por exemplo, o código 2aa5a5a.

Se as letras e os algarismos fossem todos diferentes teríamos 7! códigos.

Porém, as trocas de posição entre as 4 letras «a» e entre os 2 algarismos «5» não alteram o código, ou seja, para cada disposição existem 4! × 2! repetições.

Então: $$\frac{7!}{4! \times 2!} = 105$$

Existem 105 códigos diferentes nessas condições.

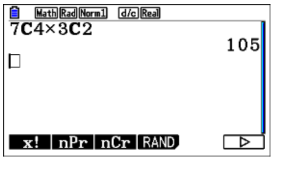
Estratégia de resolução 2

O código tem 7 posições. Assim, podemos considerar:

$^{7}C_4$ → n.º de formas de escolher 4 das 7 posições para colocar as letras «a» (a ordem não é relevante pois são letras iguais);

$^{3}C_2$ → n.º de formas de, arrumadas as letras «a», escolher 2 posições das 3 que restam, para os números «5» (não interessa a ordem).

Colocados os «a» e os «5» resta apenas uma posição para o «2»:



$$^{7}C_4 \times {}^{3}C_2 \times {}^{1}C_1 = 105$$

Existem 105 códigos diferentes nessas condições.

TAREFA 6:

Como existem 7 empates e a Ana ganha o torneio, podemos ter duas situações distintas:

- **Situação 1**: a Ana ganha os 3 jogos restantes;
- **Situação 2:** a Ana ganha 2 jogos e o Bruno ganha 1 jogo.

Situação 1: Os registos têm 7 letras "E" e 3 letras "A", então, dos 10 jogos selecionam-se 7 para terminar em empates e a ordem não interessa, porque as letras são iguais.

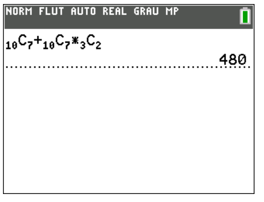
Para cada um destes registos existe apenas um modo de colocar as 3 letras “A” nos 3 jogos que restam: ${}^{10}C_7 \times {}^3C_3 = {}^{10}C_7$

Situação 2:

Os registos têm 7 letras “E”, 2 letras “A” e 1 letra “B”, então, dos 10 jogos selecionam-se 7 para terminar em empates (a ordem não interessa).
Dos 3 jogos restantes selecionam-se 2 para posicionar as letras “A” (a ordem não interessa).
Para cada um destes registos existe apenas um modo de colocar a letra “B” no jogo que resta: ${}^{10}C_7 \times {}^3C_2 \times {}^1C_1 = {}^{10}C_7 \times {}^3C_2$

Somando o número de registos das duas situações, tem-se: ${}^{10}C_7 + {}^{10}C_7 \times {}^3C_2 = 480$

Existem 480 registos diferentes nas condições do enunciado.



TAREFA 7:

Os números têm 5 algarismos (maiores que 9 999 e menores que 22 000).

Relativamente ao 1.º algarismo, este só pode ser 1 ou 2.

Situação 1: 1.º algarismo igual a 1.

$$\underset{\text{algarismo 1}}{\underline{1}} \times \underbrace{\underline{4} \times \underline{4} \times \underline{4} \times \underline{4}}_{{}^4A'_4} \qquad {}^4A'_4 = 4^4 = 256$$

Situação 2: 1.º algarismo igual a 2.

$$\overset{\text{algarismo 2}}{\underline{1}} \times \underset{\text{algarismos 0 ou 1}}{\underline{2}} \times \underbrace{\underline{4} \times \underline{4} \times \underline{4}}_{{}^4A'_3} \qquad 2 \times {}^4A'_3 = 2 \times 4^3 = 128$$

Então: $256 + 128 = 384$ **Resposta:** Opção (C)

Explora os exemplos de exercícios resolvidos e **repete-os** sem olhar para a resolução.

O QUE APRENDI?

Já sabes em que consistem as combinações?
És capaz de resolver problemas recorrendo às combinações?
Consegues resolver as tarefas sem ajuda?
Ainda tens dúvidas?

Analisa as tuas propostas de resolução. Se necessário, repete a resolução das tarefas.

Procura no teu manual escolar os exercícios resolvidos sobre o tema "Combinações". **Analisa-os** e **resolve** sozinho. Por fim, **compara** a tua resolução com a do manual e com as dos teus colegas.

COMO POSSO COMPLEMENTAR A APRENDIZAGEM?

Explora a sugestão de recursos para complementares a tua aprendizagem ou esclareceres dúvidas.

Em estudoautonomo.dge.mec.pt:

Cálculo combinatório com a calculadora gráfica

Videoaula 4 | Combinações, arranjos e permutações (1)

Videoaula 5 | Combinações, arranjos e permutações (2)

Videoaula 6 | Cálculo combinatório: resolução de problemas

Outros recursos:

Iave.pt

Khan Academy