

GTA | Guião de Trabalho Autónomo n.º 3

MATEMÁTICA A 10.º ANO

Tema 1: Modelos matemáticos para a cidadania

Subtema 2: Modelos Matemáticos nas eleições e na partilha



PORQUÊ APRENDER SOBRE...?



O QUE VOU APRENDER?



COMO VOU APRENDER?



O QUE APRENDI?



COMO POSSO COMPLEMENTAR A
APRENDIZAGEM?



COMO VOU APRENDER?

Modelos Matemáticos na Partilha

Há eleições em que não se elege uma pessoa mas sim um grupo de pessoas, como seja a eleição dos vereadores para uma Câmara Municipal. A lei define quantos vereadores vai ter cada Câmara Municipal, em função do número de residentes em cada município.

Há dois métodos importantes para fazer a distribuição dos vereadores pelos partidos/coligações concorrentes. Como os métodos podem dar resultados diferentes, importa conhecer como se pode fazer a partilha dos vereadores pelos partidos/coligações em função dos votos obtidos por cada um.



O QUE VOU APRENDER?

- O que é maioria simples e maioria absoluta.
- Em que consiste o método de Borda.
- **Em que consiste o Método de Hondt.**
- **Em que consiste o Método de Sainte-Laguë.**



PORQUÊ APRENDER SOBRE...?

GTA 1: Maioria Simples

GTA 2: Maioria Absoluta e Método de Borda

GTA 3: Modelos Matemáticos na Partilha

Tema 1: Modelos matemáticos para a cidadania

Subtema 1: Modelos Matemáticos nas eleições e na partilha



GTA 3: Modelos Matemáticos na Partilha

Objetivo: O que são e como se aplicam os métodos de partilha

Modalidade de trabalho: trabalho individual

Recursos e materiais : capítulo “Modelos Matemáticos na Partilha” do [Manual NiuAleph](#), manual escolar e *internet*.

TAREFA 1

Relembra, lê e copia para o teu caderno.

Modelos matemáticos na partilha

Nas tarefas anteriores vimos alguns modelos matemáticos que nos permitem escolher pessoas para uma posição, seja Presidente da República, seja Presidente de uma Câmara Municipal, seja campeão de Fórmula 1. Mas existem situações diferentes, como seja a da eleição dos vereadores para uma Câmara Municipal, pois neste caso não se escolhe uma só pessoa, mas sim um grupo de pessoas. A lei define quantos vereadores vai ter cada Câmara Municipal, em função do número de residentes em cada município.

Para cada eleição autárquica, a Comissão Nacional de Eleições (CNE) publica, nos termos da lei, a lista do número de vereadores a eleger para cada Câmara Municipal (e também para a Assembleia Municipal e para a Assembleia de Freguesia, mas não vamos discutir esses casos aqui). Para as eleições autárquicas de 2021, a CNE publicou o mapa com o número de mandatos em, <https://www.cne.pt/content/eleicoes-autarquicas-2021>.

O mapa oficial dos resultados das eleições gerais para os titulares dos órgãos das autarquias locais de 26 de setembro de 2021 pode ser descarregado nas seguintes ligações:

[Em formato PDF](#)

[Em formato de Folha de Cálculo](#)



Método de Hondt

Vamos agora efetuar os cálculos do número de vereadores de cada partido ou coligação para a Câmara Municipal de Lisboa. Como é feito esse cálculo, de modo a que o número de vereadores seja proporcional ao número de votos obtido por cada lista (partido ou coligação)? A Lei Orgânica n.º 1/2001 relativa à Eleição dos titulares dos órgãos das autarquias locais determina, no seu artigo 13.º, o seguinte:

“Artigo 13.º

Critério de eleição

A conversão de votos em mandatos faz-se de acordo com o método de representação proporcional correspondente à média mais alta de Hondt, obedecendo às seguintes regras:

- a) Apura-se, em separado, o número de votos recebidos por cada lista no círculo eleitoral respetivo;**
- b) O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc., sendo os quocientes alinhados pela ordem decrescente da sua grandeza numa série de tantos termos quantos os mandatos que estiverem em causa;**
- c) Os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série;**
- d) No caso de restar um só mandato para distribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido o menor número de votos.”**

Assim, para eleição dos vereadores da Câmara Municipal, é necessário aplicar o procedimento chamado **Método de Hondt**. Em que consiste?

A Lei Orgânica n.º 1/2001, como vimos acima, explica o método bem como proceder em caso de empate. Vamos aplicá-la primeiro num exemplo muito simples (ver Tarefa 2).

TAREFA 2

Suponhamos que para a eleição da Câmara Municipal de Alvaiázere, que elege 5 vereadores, se apresentam apenas três partidos, A, B e C, e que os resultados desses partidos são, respetivamente, 1577, 1532 e 402 (estes são os resultados das eleições autárquicas de 2021, embora houvesse mais partidos concorrentes, mas com menor expressão do que os 3 indicados).



O Método de Hondt diz que o “número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc.”, conforme na Tabela 1:

Divisão por...	Partido A	Partido B	Partido C
1	1577	1532	402
2	788,5	766	201
3	525,7	510,7	134

Tabela 1

A seguir colocam-se “os quocientes alinhados pela ordem decrescente da sua grandeza numa série de tantos termos quantos os mandatos que estiverem em causa”. Como há cinco mandatos em causa devemos escolher, para colocar em linha, os cinco maiores quocientes:

1577 (Partido A),
1532 (Partido B),
788,5 (Partido A),
766 (Partido B),
525,7 (Partido A).

Estão assim atribuídos os cinco mandatos, sendo três para o Partido A e dois para o Partido B.

2.1 Procura na página da CNE a folha de cálculo com os resultados das eleições autárquicas de 2021 para a Câmara Municipal de Lisboa e calcula o número de vereadores atribuídos a cada partido/coligação.

2.2 Recorrendo aos resultados das Eleições Autárquicas de 2021 para a Câmara Municipal de Alvaiázere, determina:

a) Quantos votos deveria ter obtido o partido C de modo a conquistar um vereador?

b) Em que circunstâncias um dos quocientes dos partidos B e C daria um empate. Como procederia nesse caso?



TAREFA 3

Método de Sainte-Laguë

Em todas (ou quase todas) as eleições em Portugal em que é preciso partilhar um certo número de lugares por duas ou mais listas de partidos ou coligações é utilizado o Método de Hondt. Mas nalguns países usa-se um outro método conhecido por Método de Sainte-Laguë, como por exemplo, na Alemanha, na Bósnia, na Noruega, na Suécia ou na Nova Zelândia.

É fácil explicar este novo método. Podemos dizer que é exatamente igual ao método de Hondt, exceto que em vez de usar os divisores 1, 2, 3, 4, 5, etc. usam-se os divisores 1, 3, 5, 7, 9, etc. Isto é, usam-se como divisores números ímpares sucessivos. Qual é a diferença deste método em relação ao que usámos anteriormente?

TAREFA 4

Retomemos o caso da eleição da Câmara Municipal de Alvaiázere, que elege 5 vereadores, supondo que se apresentam apenas três partidos, A, B e C, e que os resultados desses partidos são, respetivamente, 1577, 1532 e 402, e aplicado o Método de Sainte-Laguë obtêm-se os valores da Tabela 2:

Divisão por...	Partido A	Partido B	Partido C
1	1577	1532	402
3	525,7	510,7	134
5	315,4	306,4	80,4

Tabela 2

Desta vez, para escolher a quem são atribuídos os mandatos, a linha dos cinco maiores quocientes passa a ser:

1577 (Partido A),
1532 (Partido B),
525,7 (Partido A),
510,7 (Partido B),
402 (Partido C).

Então, recorrendo ao Método de Sainte-Laguë, os cinco mandatos atribuídos serão: dois para o Partido A, dois para o Partido B e um para o partido C.



Esta situação é completamente diferente da obtida ao aplicar o Método de Hondt. É melhor, é pior? Não cabe aqui essa discussão, pois seria preciso entrar com outros fatores políticos e sociais que não temos possibilidade de aprofundar aqui. Mas fica claro, do ponto de vista da Matemática, que a utilização do método de Hondt e do Método de Sainte-Laguë, ou de um outro método, pode produzir resultados muito diferentes.

4.1 Procura na página da CNE a folha de cálculo com os resultados das eleições autárquicas de 2021 para a Câmara Municipal de Lisboa e **calcula** os vereadores atribuídos a cada partido/coligação, caso seja aplicado o Método de Sainte-Laguë.

4.2 Recorrendo aos resultados das Eleições Autárquicas de 2021 para a Câmara Municipal de Alvaiázere, determina:

a) Quantos votos deveria ter obtido o partido A de modo a conquistar três vereadores, aplicando agora o Método de Sainte-Laguë?

b) Como compararias estes resultados com os do item 2.2 a), da Tarefa 2?

TAREFA 5

Copia para o teu caderno o resumo que se segue.

Modelos Matemáticos na Partilha

Nas eleições em que não se elege uma pessoa mas sim um grupo de pessoas, como seja a eleição dos vereadores para uma Câmara Municipal, importa saber como se pode fazer a partilha dos vereadores pelos partidos/coligações em função dos votos obtidos por cada um.

No **Método de Hondt** o “número de votos apurados por cada partido/coligação é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc.”, sendo os quocientes obtidos alinhados pela ordem decrescente da sua grandeza numa série de tantos termos quantos os mandatos que estiverem em causa. Os mandatos pertencem aos partidos/coligações a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, sendo atribuídos a cada um dos partidos/coligações tantos mandatos quantos os seus termos na série.

No **Método de Sainte-Laguë** procede-se exatamente como no método de Hondt, exceto que em vez de usar os divisores 1, 2, 3, 4, 5, etc. usam-se os divisores 1, 3, 5, 7, 9, etc. Isto é, usam-se como divisores números ímpares sucessivos.



PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

Deves tentar resolver por ti próprio a tarefa.

Relê o texto desde o início, **lê** o enunciado da tarefa e **tenta** responder.

Se não conseguires responder, **lê** as sugestões mais abaixo.

Só deves olhar para a proposta de resolução (2.^a parte) depois de teres conseguido chegar à tua própria resolução.

TAREFA 2

1.^a parte – Sugestões para a resolução

2.1 Procura na página da CNE a folha de cálculo com os resultados das eleições autárquicas de 2021 para a Câmara Municipal de Lisboa e calcula os vereadores atribuídos a cada partido/coligação, de acordo com as regras definidas.

“O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc., sendo os quocientes alinhados pela ordem decrescente da sua grandeza numa série de tantos termos quantos os mandatos que estiverem em causa.”

Os dados podem ser obtidos a partir da página:

Comissão Nacional de Eleições, <https://www.cne.pt/>

Escolher a opção “Eleições / Referendos”, seguido de “Autárquica - Gerais” e finalmente “26/09/2021”. Uma das opções é “Resultados - formato folha de cálculo” que podes descarregar e esta folha de cálculo contém os dados de todo o país.

Se não conseguires, podes também recolher os dados a partir de:

Secretaria-Geral do Ministério da Administração Interna,

<https://www.eleicoes.mai.gov.pt/autarquicas2021/>

E, depois, retirar os dados da tabela obtida ao teres selecionado o município de Lisboa.

2.2 Aplicar o artigo 13.º da Lei Orgânica n.º 1/2001 relativa à Eleição dos titulares dos órgãos das autarquias locais. Os dados são os que constam da Tabela 1.

2.^a parte – Uma possível resolução

2.1 Procura na página da CNE a folha de cálculo com os resultados das eleições autárquicas de 2021 para a Câmara Municipal de Lisboa e calcula os vereadores atribuídos a cada partido/coligação. Para fazer esse cálculo, vai dividindo o número de votos de cada partido/coligação **“por 1, 2, 3, 4, 5, etc., ”**.



PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

Partidos/Coligações	PPD/PSD.CDS-PP.A.MPT.PPM	V	PS.L	V	PCP-PEV	V	B.E.	V	IL	V	PAN	V	VP	V	STL	V	NC	V	E	V	PDR	V
Votantes	83163	1	80869	2	25520	7	15054	12	10238		6625		1011		864		530		339		319	
1	83163	1	80869	2	25520	7	15054	12	10238		6625		1011		864		530		339		319	
2	41581.5	3	40434.5	4	12760	15	7527		5119		3312.5		505.5		432		265		169.5		159.5	
3	27721	5	26956.3333	6	8506.66667		5018		3412.66667		2208.33333		337		288		176.666667		113		106.333333	
4	20790.75	8	20217.25	9	6380		3763.5		2559.5		1656.25		252.75		216		132.5		84.75		79.75	
5	16632.6	10	16173.8	11	5104		3010.8		2047.6		1325		202.2		172.8		106		67.8		63.8	
6	13860.5	13	13478.1667	14	4253.33333		2509		1706.33333		1104.16667		168.5		144		88.3333333		56.5		53.1666667	
7	11880.42857	16	11552.7143	17	3645.71429		2150.57143		1462.57143		946.428571		144.428571		123.428571		75.7142857		48.4285714		45.5714286	
8	10395.375		10108.625		3190		1881.75		1279.75		828.125		126.375		108		66.25		42.375		39.875	
9	9240.333333		8985.44444		2835.55556		1672.66667		1137.55556		736.111111		112.333333		96		58.8888889		37.6666667		35.4444444	
10	8316.3		8086.9		2552		1505.4		1023.8		662.5		101.1		86.4		53		33.9		31.9	
Vereadores		7	7	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total de Vereadores	17																					

Tabela 3

A Tabela 4 apresenta os dados só dos partidos que elegeram vereadores.

Partidos/Coligações	PPD/PSD.CDS-PP.A.MPT.PPM	V	PS.L	V	PCP-PEV	V	B.E.	V
Votantes	83163	1	80869	2	25520	7	15054	12
1	83163	1	80869	2	25520	7	15054	12
2	41581.5	3	40434.5	4	12760	15	7527	
3	27721	5	26956.3333	6	8506.66667		5018	
4	20790.75	8	20217.25	9	6380		3763.5	
5	16632.6	10	16173.8	11	5104		3010.8	
6	13860.5	13	13478.1667	14	4253.33333		2509	
7	11880.42857	16	11552.7143	17	3645.71429		2150.57143	
8	10395.375		10108.625		3190		1881.75	
9	9240.333333		8985.44444		2835.55556		1672.66667	
10	8316.3		8086.9		2552		1505.4	
Vereadores		7	7	2	1			
Total de Vereadores	17							

Assim, a coligação PPD/PSD.CDS-PP.A.MPT.PPM elegeu 7 vereadores, a coligação PS.L também elegeu 7 vereadores, a coligação PCP-PEV elegeu 2 vereadores e o BE elegeu 1 vereador.

2.2

a) O Partido C conquistaria um vereador se tivesse, pelo menos, 526 votos. Nestas circunstâncias, o partido A não elegeria o vereador com o quociente de 525.7.

b) Um dos quocientes dos partidos B e C daria um empate se, por exemplo, um dos votos do partido B tivesse sido atribuído ao partido A e 124 votos atribuídos ao partido C. Então, existiria um empate entre A e C, com 526 votos, e C elegeria um vereador.

TAREFA 4

1.ª parte – Sugestões para a resolução

4.1 Procura na página da CNE a folha de cálculo com os resultados das eleições autárquicas de 2021 para a Câmara Municipal de Lisboa e calcula os vereadores atribuídos a cada partido/coligação, desta vez aplicando o Método de Sainte-Laguë. Isso significa que o número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, desta vez por 1, 3, 5, 7, 9, etc.



PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

4.2 Desta vez, como vamos aplicar o Método de Sainte-Laguë, será preciso dividir o número de votos “**por 1, 3, 5, 7, 9, etc.,**”. Quantos votos deverá obter o partido A de modo que o terceiro quociente, obtido pela divisão por 5, fique superior ao número de votos do partido C?

2.ª parte – Uma possível resolução

4.1 Procura na página da CNE a folha de cálculo com os resultados das eleições autárquicas de 2021 para a Câmara Municipal de Lisboa e calcula os vereadores atribuídos a cada partido/coligação, caso seja aplicado o Método de Sainte-Laguë. Para fazer esse cálculo, divide o número de votos de cada partido/coligação “**por 1, 3, 5, 7, 9, etc.,**”.

Partidos/Coligações	PPD/PSD.CDS-PP.A.MPT.PPM	V	PS.L	V	PCP-PEV	V	B.E.	V	IL	V	PAN	V	VP	V	STL	V	NC	V	E	V	PDR	V
Votantes	83163	1	80869	2	25520	5	15054	8	10238	11	6625	17	1011		864		530		339		319	
1	83163	1	80869	2	25520	5	15054	8	10238	11	6625	17	1011		864		530		339		319	
3	27721	3	26956.333	4	8506.6667	14	5018		3412.6667		2208.3333		337		288		176.6667		113		106.33333	
5	16632.6	6	16173.8	7	5104		3010.8		2047.6		1325		202.2		172.8		106		67.8		63.8	
7	11880.42857	9	11552.714	10	3645.7143		2150.5714		1462.5714		946.42857		144.42857		123.42857		75.714286		48.428571		45.571429	
9	9240.333333	12	8985.4444	13	2835.5556		1672.6667		1137.5556		736.11111		112.33333		96		58.888889		37.666667		35.444444	
11	7560.272727	15	7351.7273	16	2320		1368.5455		930.72727		602.27273		91.909091		78.545455		48.181818		30.818182		29	
13	6397.153846		6220.6923		1963.0769		1158		787.53846		509.61538		77.769231		66.461538		40.769231		26.076923		24.538462	
15	5544.2		5391.2667		1701.3333		1003.6		682.53333		441.66667		67.4		57.6		35.333333		22.6		21.266667	
17	4891.941176		4757		1501.1765		885.52941		602.23529		389.70588		59.470588		50.823529		31.176471		19.941176		18.764706	
19	4377		4256.2632		1343.1579		792.31579		538.84211		348.68421		53.210526		45.473684		27.894737		17.842105		16.789474	
Vereadores		6	6	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total de Vereadores		17																				

Tabela 5

Na tabela 6 estão apresentados os valores relativos apenas dos partidos que elegeram vereadores.

Partidos/Coligações	PPD/PSD.CDS-PP.A.MPT.PPM	V	PS.L	V	PCP-PEV	V	B.E.	V	IL	V	PAN	V
Votantes	83163		80869		25520		15054		10238		6625	
1	83163	1	80869	2	25520	5	15054	8	10238	11	6625	17
3	27721	3	26956.333	4	8506.6667	14	5018		3412.6667		2208.3333	
5	16632.6	6	16173.8	7	5104		3010.8		2047.6		1325	
7	11880.42857	9	11552.714	10	3645.7143		2150.5714		1462.5714		946.42857	
9	9240.333333	12	8985.4444	13	2835.5556		1672.6667		1137.5556		736.11111	
11	7560.272727	15	7351.7273	16	2320		1368.5455		930.72727		602.27273	
13	6397.153846		6220.6923		1963.0769		1158		787.53846		509.61538	
15	5544.2		5391.2667		1701.3333		1003.6		682.53333		441.66667	
17	4891.941176		4757		1501.1765		885.52941		602.23529		389.70588	
19	4377		4256.2632		1343.1579		792.31579		538.84211		348.68421	
Vereadores		6	6	2	1	1	1	1	1	1	1	1
Total de Vereadores		17										

Tabela 6

Aplicado o Método de Sainte-Laguë constatamos que a coligação PPD/PSD.CDS-PP.A.MPT.PPM elegeria 6 vereadores, a coligação PS.L também elegeria 6 vereadores, a coligação PCP-PEV elegeria na mesma 2 vereadores o BE elegeria 1 vereador, mas o mesmo aconteceria com o IL e o PAN.



PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

4.2 a)

Divisão por...	Partido A	Partido B	Partido C
1	1577	1532	402
3	525,7	510,7	134
5	315,4	306,4	80,4

Tabela 2

Para que o Partido A tivesse três vereadores, teria de ter 2011 votos, pois

$$5 \times 402 = 2010$$

e, caso o Partido A tivesse 2010 votos, o quociente entre o Partido A e o Partido C seria o mesmo. Assim o vereador era atribuído ao Partido C (porque a lei eleitoral prevê em situações de empate atribuir o vereador à lista menos votada). Deste modo, para ser atribuído ao Partido A o terceiro vereador, este Partido teria de ter pelo menos mais um voto que o Partido C, ou seja, pelo menos 2011 votos.

b) Usando o Método de Hondt, o Partido A obteria três mandatos, com os 1577 votos. Com o Método de Sainte-Laguë o Partido A só obteria três mandatos se conseguisse obter 2011 votos, ou seja, mais 434 votos, que são mais do que os votos obtidos pelo Partido C.



O QUE APRENDI?

Já **sabes** como se pode fazer a partilha dos vereadores eleitos numa Câmara Municipal pelos partidos/coligações em função dos votos obtidos por cada um?

És capaz de ...

- aplicar o Método de Hondt?
- aplicar o Método de Sainte-Laguë?

Procura no teu manual escolar os exercícios resolvidos sobre o tema “Modelos matemáticos na Partilha”. **Analisa-os** e **resolve** sozinho. Por fim, **compara** a tua resolução com a do manual e com as dos teus colegas.

Estuda, com um colega de turma, para consolidares a tua aprendizagem.



COMO POSSO COMPLEMENTAR A APRENDIZAGEM?

Se quiseres saber mais sobre o método de Hondt, podes consultar:

Comissão Nacional de Eleições - Método de Hondt

<https://www.cne.pt/content/metodo-de-hondt>

Para saber mais sobre os Métodos de Hondt e de Sainte-Laguë, podes consultar a Wikipédia:

Método de Hondt, Wikipédia

https://pt.wikipedia.org/wiki/Método_D%27Hondt

Método de Sainte-Laguë, Wikipédia

https://pt.wikipedia.org/wiki/Método_de_Sainte-Laguë

Se quiseres saber mais sobre quem, pela primeira vez, apresentou estes métodos, podes consultar:

Victor D'Hondt, Wikipédia

https://pt.wikipedia.org/wiki/Victor_D%27Hondt

Victor d'Hondt, the dead Belgian who could influence the European elections. The Guardian, 22 May 2019

<https://www.theguardian.com/politics/shortcuts/2019/may/22/victor-dhondt-the-dead-belgian-who-could-influence-the-european-elections>

André Sainte-Laguë, Wikipédia

https://en.wikipedia.org/wiki/André_Sainte-Laguë

André Sainte-Laguë, MacTutor

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Sainte-Lague/>