GTA | Guião de Trabalho Autónomo n.º 6

DISCIPLINA
11.º ANO

Tema 1: Geometria
Subtema 2: Ângulo orientado e ângulo generalizado

PORQUÊ APRENDER SOBRE...?

O QUE VOU APRENDER?

COMO VOU APRENDER?

O QUE APRENDI?

COMO POSSO COMPLEMENTAR A APRENDIZAGEM?

PORQUÊ APRENDER SOBRE...?

Trigonometria

Vem resolver problemas variados e aplicar diferentes métodos de resolução.

Vem descobrir!

O QUE VOU APRENDER?

Ângulo no circulo trigonométrico

- Relacionar e aplicar na resolução de problemas as noções de ângulo orientado e a respetiva amplitude; e de ângulo generalizado e a respetiva amplitude;
- Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas: Razões trigonométricas de ângulos generalizados no círculo trigonométrico e a noção de radiano;

COMO VOU APRENDER?

GTA 4: Conheces a *London Eye?*

GTA 5: Seno e cosseno de um ângulo generalizado

GTA 6: Sinal do seno e cosseno de um ângulo generalizado

GTA 7: Tangente de um ângulo generalizado

GTA 8: Noção de radiano

GTA 6: Sinal do Seno e cosseno de um ângulo generalizado

Objetivo:

- Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas: Razões trigonométricas de ângulos generalizados no círculo trigonométrico e a noção de radiano.

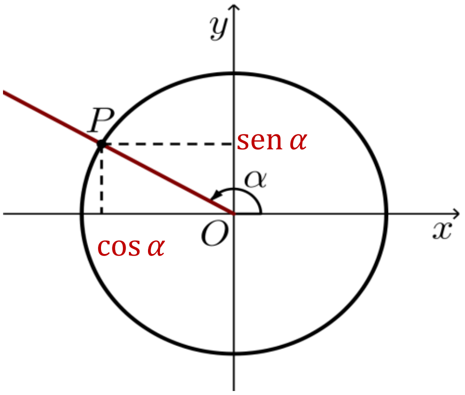
Modalidade de trabalho: pares ou pequenos grupos

Recursos e materiais: caderno diário, manual escolar, *Geogebra* e *internet*.

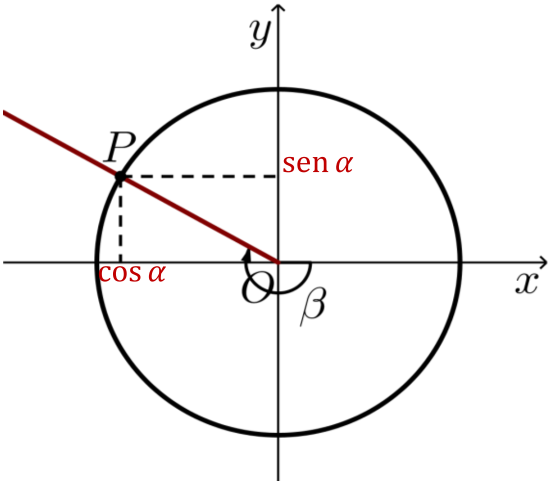
ETAPA 1

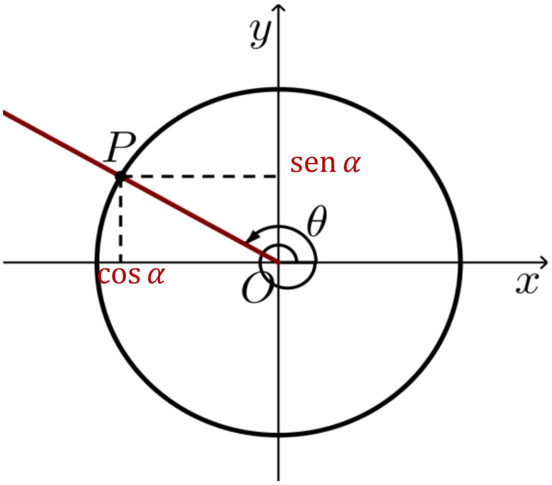
Seja α um ângulo orientado num referencial o.n. e P o ponto de interseção do seu lado extremidade com a circunferência trigonométrica.

Na figura, **repara** que a abcissa e a ordenada do ponto P são o cosseno e o seno de α, respetivamente.



Será que existem outros ângulos com o mesmo seno e o mesmo cosseno de α? Os ângulos β e θ têm seno e cosseno iguais aos de α pois têm o mesmo lado extremidade. Observa:





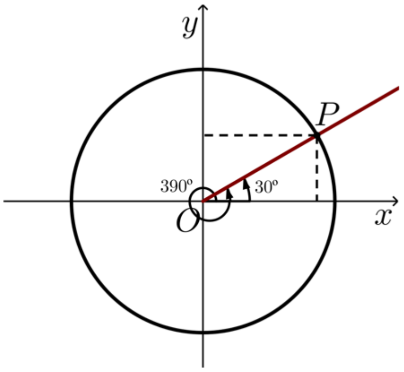
Fixando o grau como unidade de medida de amplitude de ângulo, tem-se:

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(\alpha + k \times 360°), k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \alpha = \cos(\alpha + k \times 360°), k \in \mathbb{Z}$$

Isto significa que, considerando como lado origem o semieixo positivo Ox, os ângulos generalizados com o mesmo lado extremidade têm o mesmo seno e o mesmo cosseno.

Se 30º e 390º têm como lado origem o semieixo positivo Ox têm também o mesmo lado extremidade então,



$$390° = 30° + 360°$$

$$\operatorname{sen} 390° = \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$$

$$\cos 390° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Copia para o teu caderno a informação anterior. Em cada uma das figuras anteriores, **indica** o lado origem e o lado extremidade.

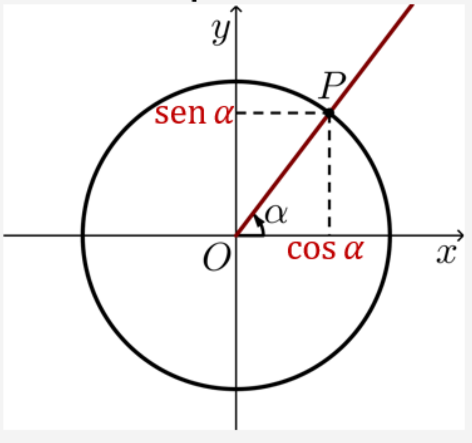
ETAPA 2

Acompanha o estudo do sinal do seno e cosseno de um ângulo generalizado.

Se o seno e o cosseno são as coordenadas do ponto de interseção do lado extremidade do ângulo com a circunferência de centro na origem e raio 1, então podem ter valores negativos ou valores positivos.

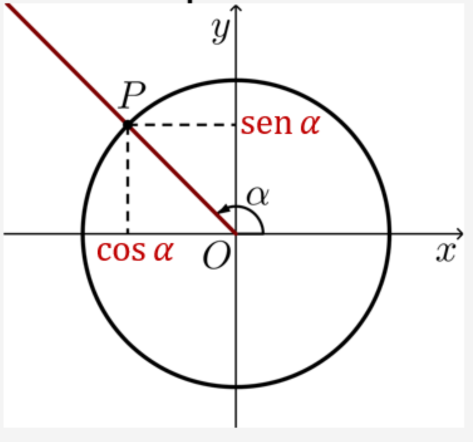
Analisa o sinal destas razões trigonométricas nos quatro quadrantes.

1.º quadrante

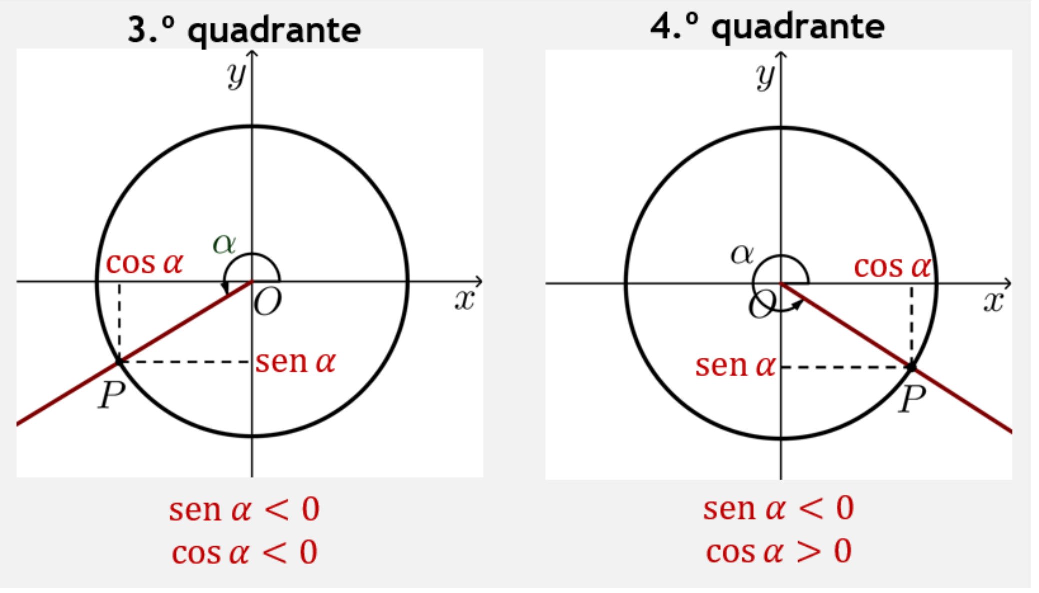


$\operatorname{sen} \alpha > 0$
$\cos \alpha > 0$

2.º quadrante



$\operatorname{sen} \alpha > 0$
$\cos \alpha < 0$



No quadro síntese, **vê** a relação entre o sinal do cosseno com o da abcissa e o sinal do seno com o da ordenada de um ponto, que se situe em cada um dos quadrantes.

α	1.º Quadrante	2.º Quadrante	3.º Quadrante	4.º Quadrante
sen α	$+$	$+$	$-$	$-$
cos α	$+$	$-$	$-$	$+$

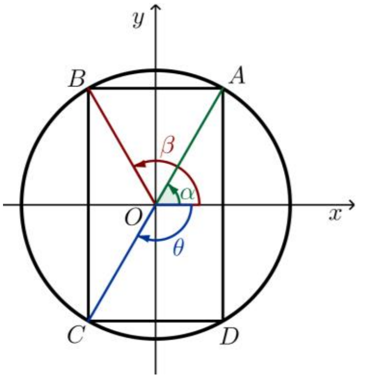
Copia para o teu caderno a informação anterior. Em cada uma das figuras anteriores, **indica** o lado origem e o lado extremidade.

Procura no teu manual os exercícios resolvidos sobre "Sinal do seno e cosseno de um ângulo generalizado". **Analisa-os** e **resolve** sozinho. Por fim, **compara** a tua resolução com a do manual e com as dos teus colegas.

TAREFA 1

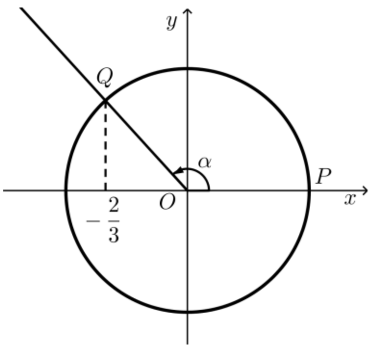
Na figura está representado o círculo trigonométrico e o retângulo $[ABCD]$ inscrito na circunferência.

- A reta AB é paralela ao eixo Ox;
- Os ângulos α, β e θ têm de lado origem o semieixo positivo Ox e de lado extremidade $\dot{O}A, \dot{O}B$ e $\dot{O}C$, respetivamente;
- $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



Determina o valor exato de: $\quad sen\,\alpha + \cos\beta - 2\cos\theta$

TAREFA 2



Na figura está representado o círculo trigonométrico.

Os pontos P e Q pertencem à circunferência.
O ponto P tem coordenadas $(1, 0)$ e o ponto Q tem abcissa $-\frac{2}{3}$.
Seja α a amplitude do ângulo POQ.

Determina $sen\ \alpha$.

Proposta de resolução:
As coordenadas de Q são $\left(-\frac{2}{3}, \text{sen}\ \alpha\right)$ e a circunferência tem equação $x^2 + y^2 = 1$, porque o centro é (0,0).

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1 - \frac{4}{9} \Leftrightarrow y^2 = \frac{5}{9} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{5}{9}}$$

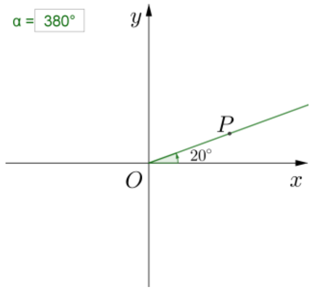
Como Q pertence ao 2. quadrante, $y > 0$

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

TAREFA 1

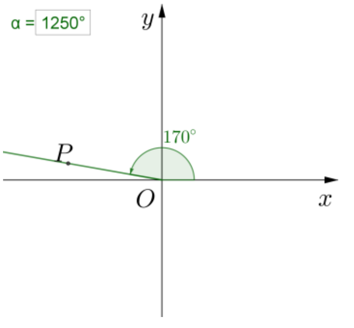
a) $380° = 20° + 1 \times 360°$

O ângulo de amplitude $380°$ pertence ao 1.º quadrante.



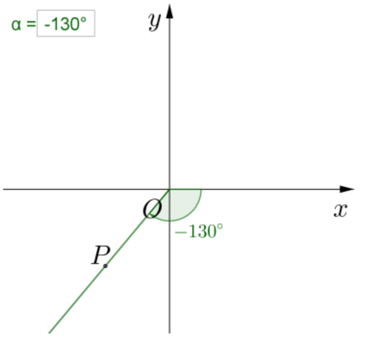
b) $1250° = 170° + 3 \times 360°$

O ângulo de amplitude $1250°$ pertence ao 2.º quadrante.



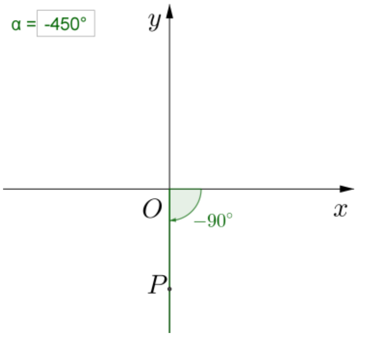
c) $-130°$

O ângulo de amplitude $-130°$ pertence ao 3.º quadrante



d) $-450° = -90° - 1 \times 360°$

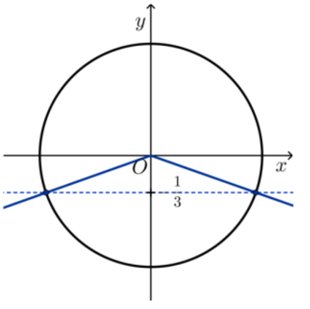
O ângulo de amplitude $-450°$ tem como lado extremidade o semieixo negativo Oy.
Está na fronteira entre o 3.º e o 4.º quadrantes.



PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

TAREFA 2

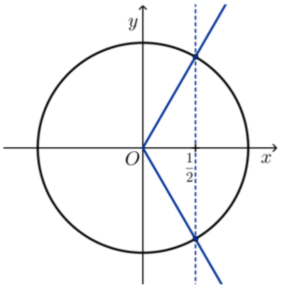
a) sen $\alpha = -\dfrac{1}{3}$



Repara que existem dois pontos da circunferência trigonométrica de ordenada $-\frac{1}{3}$.
Significa que qualquer ângulo cujo lado extremidade passe por um destes pontos tem seno igual a $-\frac{1}{3}$.
São ângulos do 3.º ou do 4.º quadrante.

Atenção: existe uma infinidade de ângulos com estes lados extremidade quer de orientação positiva quer de orientação negativa.

b) $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$

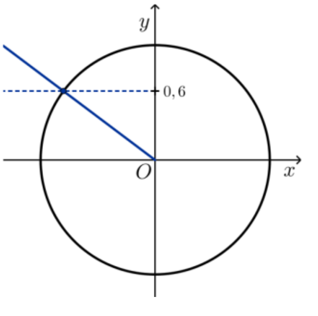


Repara que existem dois pontos da circunferência trigonométrica de abcissa $\frac{1}{2}$.
Significa que qualquer uma destas semirretas são lado extremidade de um ângulo com cosseno igual a $\frac{1}{2}$.

São ângulos do 1.º ou do 4.º quadrante.

Atenção: Também neste caso existem infinitos ângulos com estes lados extremidade quer de orientação positiva quer de orientação negativa.

c) sen $\alpha = 0{,}6$ e $\cos\alpha < 0$



Sabes que existem dois pontos da circunferência trigonométrica de ordenada $0{,}6$.

Mas se o cosseno é negativo, a abcissa do ponto tem de ser negativa.
Isso significa que esta semirreta é o lado extremidade dos ângulos que obedecem às condições do enunciado. Neste caso, são ângulos do 2.º quadrante

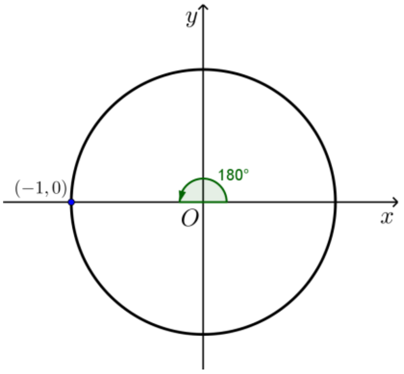
Atenção: Mais uma vez existem infinitos ângulos nestas condições.

Podes, também, **utilizar** a tua calculadora gráfica ou o *Geogebra* para explorar esta tarefa.

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

TAREFA 3

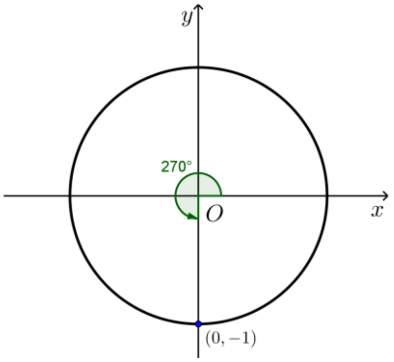
A definição de seno e cosseno de um ângulo generalizado permite completar a tabela. Como?



Por exemplo, se pretendermos o seno e o cosseno de $180°$ observamos que o ponto de interseção do seu lado extremidade com a circunferência trigonométrica tem coordenadas $(-1, 0)$.

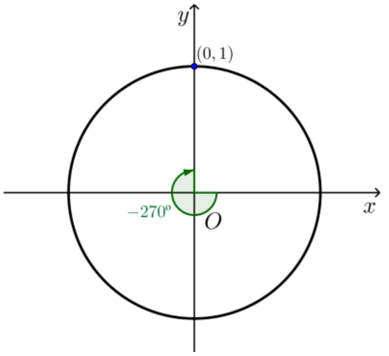
Ou seja, a abcissa é o cosseno e a ordenada é o seno.

$\text{sen } 180° = 0$ $\cos 180° = -1$



Outro exemplo, se pretendermos o seno e o cosseno de $270°$ observamos que o ponto de interseção do seu lado extremidade com a circunferência trigonométrica tem coordenadas $(0, -1)$.
Ou seja, a abcissa é o cosseno e a ordenada é o seno.

$\text{sen } 270° = -1$ $\cos 270° = 0$



Ainda outro exemplo, para o seno e o cosseno de $-270°$, observamos que o ponto de interseção do seu lado extremidade com a circunferência trigonométrica tem coordenadas $(0, 1)$.
Ou seja, a abcissa é o cosseno e a ordenada é o seno.

$\text{sen } (-270°) = 1$ $\cos(-270°) = 0$

Coloca estes valores na tabela.

Faz o mesmo raciocínio para os restantes valores.

Amplitude de α	$-360°$	$-270°$	$-180°$	$-90°$	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\text{sen } \alpha$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1

Podes, também, **utilizar** a tua calculadora gráfica ou o *Geogebra* para fazer a exploração dos ângulos da tabela.

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

TAREFA 4

Item 1

a) Sabendo as coordenadas dos pontos $A\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ e $B\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{1}{3}\right)$

$$\overline{OA}=\sqrt{\left(\frac{3}{5}-0\right)^2+\left(\frac{4}{5}-0\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}}=\sqrt{1}=1$$

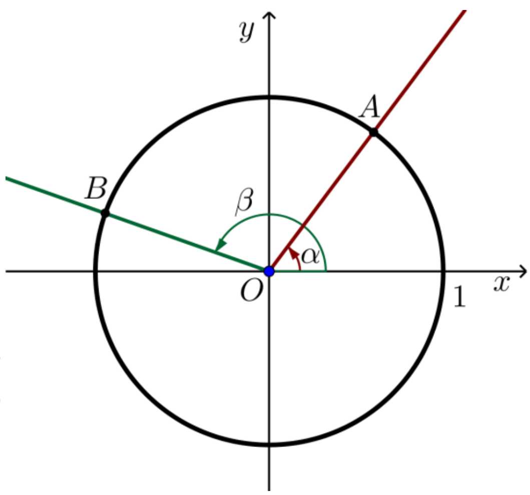
$$\overline{OB}=\sqrt{\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}-0\right)^2+\left(\frac{1}{3}-0\right)^2}=\sqrt{\frac{8}{9}+\frac{1}{9}}=\sqrt{1}=1$$

b) Se $\overline{OA}=1$ e $\overline{OB}=1$ então os pontos A e B pertencem à circunferência trigonométrica.

$$\text{sen}\,\alpha=\frac{4}{5}$$ ⟵ ordenada de A

$$\cos\beta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$ ⟵ abcissa de B

$$\text{sen}\,\alpha+\cos\beta=\frac{4}{5}-\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{12-10\sqrt{2}}{15}$$



Item 2

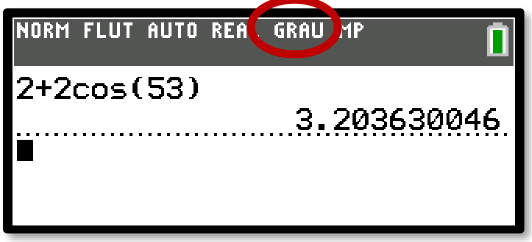
Como se trata do círculo trigonométrico, a circunferência tem raio 1.
Então,

$$\overline{OP}=\overline{OQ}=1 \qquad P(\cos 53°, sen\ 53°)$$

Assim, Perímetro de $[OPQ]$:

$$\overline{OP}+\overline{PQ}+\overline{OQ}=1+2\cos 53°+1=2+2\cos 53°\approx 3{,}2$$

Atenção: Não te esqueças de selecionar "Grau" e dar a resposta com o valor aproximado às décimas.



O QUE APRENDI?

Já sabes resolver problemas envolvendo a trigonometria?

Consegues resolver as tarefas sem ajuda?
Ainda tens dúvidas?

Se tiveres dúvidas, **visualiza** a Videoaula 6 onde encontras os exercícios explicados.

Procura no teu manual escolar os exercícios resolvidos sobre o tema "Trigonometria". **Analisa-os** e **resolve** sozinho. Por fim, **compara** a tua resolução com a do manual e com as dos teus colegas.

Estuda, com um colega de turma, para consolidares a tua aprendizagem.

COMO POSSO COMPLEMENTAR A APRENDIZAGEM?

Explora a sugestão de recursos para complementares a tua aprendizagem ou esclareceres dúvidas.

Em estudoautonomo.dge.mec.pt:

Videoaula 5 | Seno e cosseno de ângulos generalizados

Ângulo generalizado | Estudo Autónomo

Outros recursos:

Iave.pt

Khan Academy