GTA | Guião de Trabalho Autónomo n.º 7

DISCIPLINA
11.º ANO

Tema 1: Geometria
Subtema 2: Ângulo orientado e ângulo generalizado

PORQUÊ APRENDER SOBRE...?

O QUE VOU APRENDER?

COMO VOU APRENDER?

O QUE APRENDI?

COMO POSSO COMPLEMENTAR A APRENDIZAGEM?

PORQUÊ APRENDER SOBRE...?

Trigonometria

Vem resolver problemas variados e trabalhar a tangente de um ângulo generalizado.

Vem descobrir!

O QUE VOU APRENDER?

Ângulo no circulo trigonométrico

- Relacionar e aplicar na resolução de problemas as noções de ângulo orientado e a respetiva amplitude; e de ângulo generalizado e a respetiva amplitude;
- Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas: Razões trigonométricas de ângulos generalizados no círculo trigonométrico e a noção de radiano;

COMO VOU APRENDER?

GTA 4: Conheces a *London Eye?*

GTA 5: Seno e cosseno de um ângulo generalizado

GTA 6: Sinal do seno e cosseno de um ângulo generalizado

GTA 7: Tangente de um ângulo generalizado

GTA 8: Noção de radiano

Tema 1: Geometria

Subtema 2: Ângulo orientado e ângulo generalizado

GTA 7: Tangente de um ângulo generalizado

Objetivo:
- Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas: Razões trigonométricas de ângulos generalizados no círculo trigonométrico e a noção de radiano.

Modalidade de trabalho: pares ou em pequenos grupos

Recursos e materiais : caderno diário, manual escolar, *Geogebra* e *internet*.

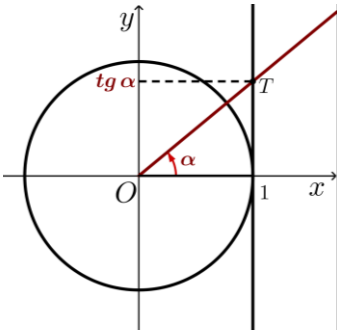
ETAPA 1

Procura no teu manual escolar a resposta à seguinte questão: **Como se define a tangente de um ângulo generalizado?**

Visualiza o vídeo que explica, recorrendo a um *applet GeoGebra,* como se define a tangente de um ângulo generalizado.

Já sabes responder à questão que te coloquei?

Considera a figura onde está representada uma circunferência de raio 1 e centrada na origem de um referencial o.n. xOy . Considera ainda a reta $x = 1$ tangente à circunferência no ponto (1, 0).



Considerando um referencial o.n. xOy e um ângulo generalizado α, de lados não perpendiculares e lado origem o semieixo positivo Ox, sendo T o ponto de interseção da reta de equação $x = 1$ com a reta suporte do lado extremidade de α define-se **tangente de α** como a **ordenada do ponto T**.

Repara que

Se α é um ângulo generalizado de lados perpendiculares, então **não tem tangente definida** pois o seu lado extremidade e a reta de equação $x = 1$ não se intersetam (são paralelos).

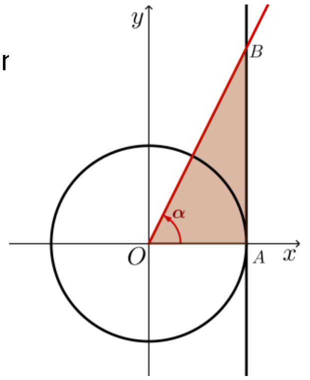
Copia para o teu caderno as informações anteriores.

TAREFA 1

Na figura, ao lado, estão representados, em referencial o.r o círculo trigonométrico, a reta de equação $x = 1$ e um ângulo α do 1.º quadrante cujo lado extremidade é $\dot{O}B$.
Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(1, 0)$;
- a área do triângulo $[OAB]$ é igual a 1.

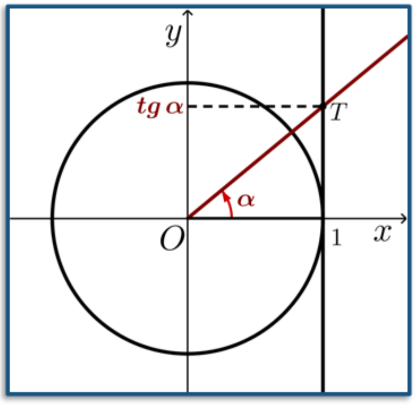
Determina o valor de tg α.



ETAPA 2

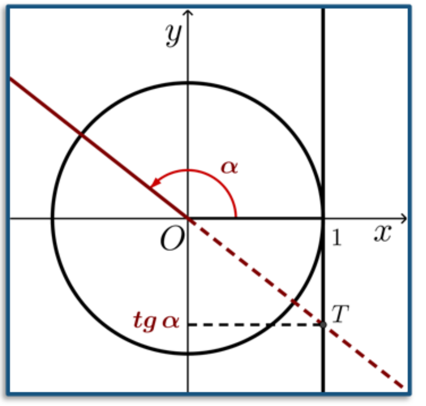
Observa o estudo do sinal da tangente de um ângulo generalizado α. O que se pode concluir?

1.º quadrante



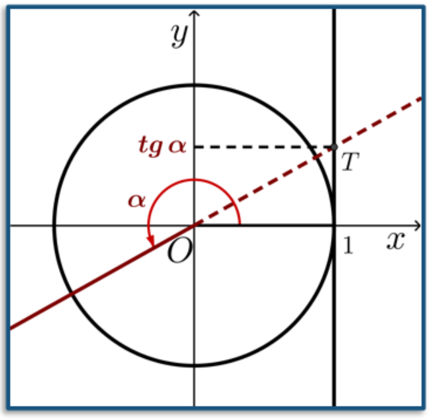
$\mathrm{tg}\,\alpha > 0$

2.º quadrante



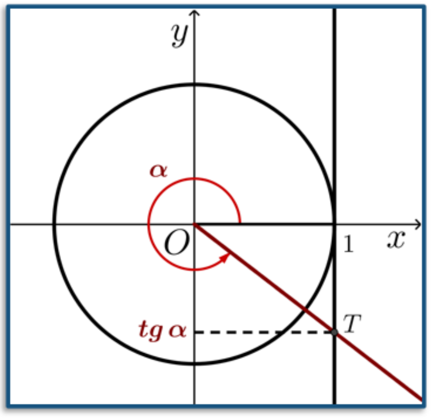
$\mathrm{tg}\,\alpha < 0$

3.º quadrante



$\mathrm{tg}\,\alpha > 0$

4.º quadrante



$\mathrm{tg}\,\alpha < 0$

Conclusão:

A tangente de um ângulo generalizado α tem sinal positivo nos quadrantes impares (1.º e 3.º quadrantes) e negativo nos quadrantes pares (2.º e 4.º quadrantes.

TAREFA 2

Qual é o quadrante a que pertence o ângulo α para que cada uma das afirmações seguintes seja verdadeira?

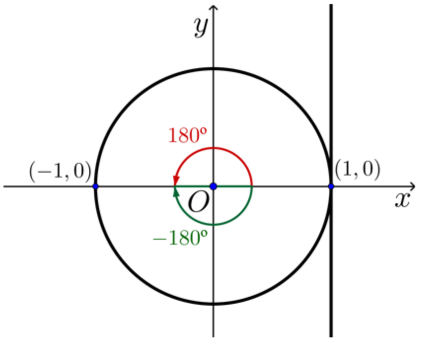
a) $\operatorname{sen}\alpha \times \operatorname{tg}\alpha > 0$

b) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha} < 0$

ETAPA 3

Considera o circulo trigonométrico de raio 1 representado na figura seguinte.

O que podes concluir sobre o valor da tangente para os ângulos coincidentes com os eixos coordenados?



No quadro síntese, **vê** que a tangente não é definida (n.d.) para os ângulos coincidentes com o eixo das ordenadas e é zero para os ângulos coincidentes com o eixo das abcissas.

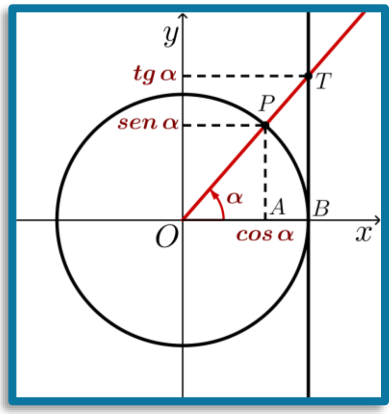
Amplitude de α	$-360°$	$-270°$	$-180°$	$-90°$	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\operatorname{tg}\alpha$	0	n.d.	0	n.d.	0	n.d.	0	n.d.	0

Copia para o teu caderno a informação anterior. Em cada uma das figuras anteriores, **qual é** o lado origem e o lado extremidade?

Procura no teu manual os exercícios resolvidos sobre “Sinal da tangente de um ângulo generalizado”. **Analisa-os** e **resolve** sozinho. Por fim, **compara** a tua resolução com a do manual e com as dos teus colegas.

ETAPA 4

Na figura ao lado está representado o círculo trigonométrico, a reta de equação $x = 1$ e o ângulo α.



Considera os pontos P e T de coordenadas:

$P\ (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ $\qquad$ $T\ (1, \operatorname{tg}\alpha)$

Qual é o declive da reta OT?

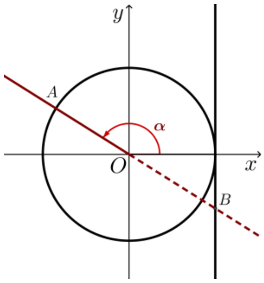
O declive da reta OT é:

$$m = \frac{\operatorname{tg}\alpha - 0}{1 - 0} = \operatorname{tg}\alpha \quad \textbf{e} \quad m = \frac{\operatorname{sen}\alpha - 0}{\cos\alpha - 0} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

então $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

TAREFA 3

Na figura ao lado estão representados, em referencial o.n. xOy, o círculo trigonométrico e a reta de equação $x = 1$.



A interseção do lado extremidade do ângulo α com a circunferência é o ponto $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

O ponto B é o ponto de interseção da reta AO com a reta de equação $x = 1$.

Determina as coordenadas do ponto B.

TAREFA 4

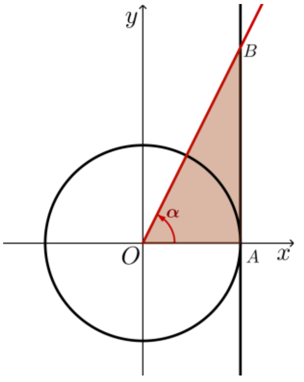
Autoavalia a tua aprendizagem.

Indica o valor lógico das seguintes afirmações e **justifica** a tua resposta:

1) $\forall x \in \left]90^0, 180^0\right[: \operatorname{sen}x \times \cos x < 0$
2) $\exists x \in \left]180^0, 270^0\right[: \cos x = \frac{1}{2}$
3) $\exists x \in \left]90^0, 270^0\right[: \operatorname{tg}x < 0$

Fonte: Adaptado de Caderno prático Novo Espaço 11, Porto Editora

TAREFA 1



Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(1, 0)$;
- a área do triângulo $[OAB]$ é igual a 1.

Então:

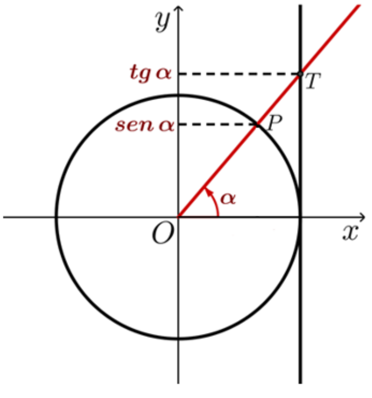
$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{AB}}{2} \Leftrightarrow 1 = \frac{1 \times \overline{AB}}{2} \Leftrightarrow \overline{AB} = 2$$

Assim, o ponto B tem coordenadas **:** $B\ (1, \underbrace{2}_{\operatorname{tg} \alpha})$

Então, $\operatorname{tg} \alpha = 2$

TAREFA 2

$\boxed{\textbf{a)}\ \operatorname{sen} \alpha \times \operatorname{tg} \alpha > 0}$



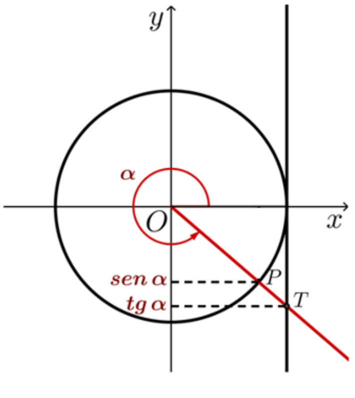
Para que o produto seja positivo $sen\ \alpha$ e $\operatorname{tg} \alpha$ têm de ter o mesmo sinal.

As razões trigonométricas de ângulos do 1.º quadrante são positivas.

Logo, α pode pertencer ao 1.º quadrante.

Existem outros quadrantes para os quais o seno e a tangente de um ângulo têm o mesmo sinal?

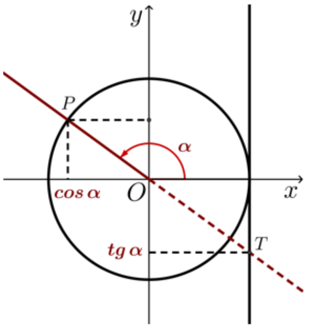
Sim, o 4.º quadrante.

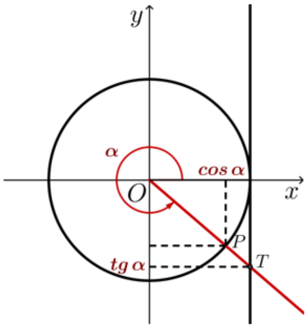


Então, α pertence ao 1.º ou ao 4.º quadrante.

b) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} < 0$

Pretende-se identificar os quadrantes onde a tangente e o cosseno têm sinais contrários.

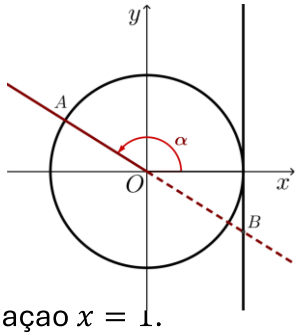




Então, α pertence ao 2.º ou ao 4.º quadrante.

TAREFA 3

Pretende-se determinar as coordenadas do ponto *B*.



Sabemos que:

A interseção do lado extremidade do ângulo α com a circunferência é o ponto $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

O ponto B é o ponto de interseção da reta AO com a reta de equaçao $x = 1$. Então as coordenadas de *A* e *B* são:

$$A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{e} \quad B\,(1, \operatorname{tg} \alpha)$$

então:

$$\left.\begin{array}{l} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \\ sen\, \alpha = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Logo, $B\left(1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

TAREFA 4

1) $\forall x \in \left]90^0, 180^0\right[: \text{sen}x \times \cos x < 0$?

Se $x \in \left]90^0, 180^0\right[$, então x é um ângulo do 2.º quadrante.
Assim, o $\text{sen}x$ é positivo e $\cos x$ é negativo. Logo, o produto $\text{sen}x \times \cos x < 0$ e a proposição é **verdadeira**.

2) $\exists x \in \left]180^0, 270^0\right[: \cos x = \frac{1}{2}$?

Se $x \in \left]180^0, 270^0\right[$, então x é um ângulo do 3.º quadrante. Assim, o $\cos x$ é negativo. Logo, não existe um ângulo do 3.º quadrante cujo cosseno seja positivo e a proposição é **falsa**.

3) $\exists x \in \left]90^0, 270^0\right[: \text{tg}x < 0$?

Se $x \in \left]90^0, 270^0\right[$, então x é um ângulo do 2.º ou 3.º quadrante. Assim, se x é um ângulo do 2.º quadrante, tem $\text{tg}x < 0$. Por exemplo, $\text{tg}\, 125° = -1$. Logo a proposição é **verdadeira**.

Podes, também, **utilizar** a tua calculadora gráfica ou o *Geogebra* para fazer a exploração com exemplos de ângulos generalizados.

O QUE APRENDI?

Já sabes resolver problemas envolvendo a trigonometria?

Consegues resolver as tarefas sem ajuda?
Ainda tens dúvidas?

Se tiveres dúvidas, **visualiza** a Videoaula 7 onde encontras os exercícios explicados.

Procura no teu manual escolar os exercícios resolvidos sobre o tema “Trigonometria”. **Analisa-os** e **resolve-os** sozinho. Por fim, **compara** a tua resolução com a do manual e com as dos teus colegas.

Estuda, com um colega de turma, para consolidares a tua aprendizagem.

COMO POSSO COMPLEMENTAR A APRENDIZAGEM?

Explora a sugestão de recursos para complementares a tua aprendizagem ou esclareceres dúvidas.

Em estudoautonomo.dge.mec.pt:

Videoaula 8 | Razões Trigonométricas de ângulos generalizados: resolução de tarefas

Outros recursos:

Iave.pt

Khan Academy