GTA | Guião de Trabalho Autónomo n.º 8

DISCIPLINA
11.º ANO

Tema 1: Geometria
Subtema 2: Ângulo orientado e ângulo generalizado

PORQUÊ APRENDER SOBRE...?

O QUE VOU APRENDER?

COMO VOU APRENDER?

O QUE APRENDI?

COMO POSSO COMPLEMENTAR A APRENDIZAGEM?

PORQUÊ APRENDER SOBRE...?

Trigonometria

Vem resolver problemas variados e aplicar a noção de radiano.

Vem descobrir!

O QUE VOU APRENDER?

Ângulo no circulo trigonométrico

- Relacionar e aplicar na resolução de problemas as noções de ângulo orientado e a respetiva amplitude; e de ângulo generalizado e a respetiva amplitude;
- Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas: Razões trigonométricas de ângulos generalizados no círculo trigonométrico e a noção de radiano;

COMO VOU APRENDER?

GTA 4: Conheces a *London Eye?*

GTA 5: Seno e cosseno de um ângulo generalizado

GTA 6: Sinal do seno e cosseno de um ângulo generalizado

GTA 7: Tangente de um ângulo generalizado

GTA 8: Noção de radiano

Tema 1: Geometria

Subtema 2: Ângulo orientado e ângulo generalizado

GTA 8: Noção de radiano

Objetivo:

- Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas: Razões trigonométricas de ângulos generalizados no círculo trigonométrico e a noção de radiano.

Modalidade de trabalho: pares ou em pequenos grupos

Recursos e materiais : caderno diário, manual escolar, *Geogebra* e *internet*.

ETAPA 1

Procura no teu manual escolar a resposta à seguinte questão: **O que é a unidade de medida angular, o radiano?**

Visualiza o vídeo e recorre a um *applet GeoGebra p*ara compreender o que é o radiano.

Já sabes responder à questão que te coloquei?

> Designa-se por **radiano** a amplitude de um ângulo ao centro de uma circunferência que nela determina um arco de comprimento igual ao raio. Usa-se abreviadamente **rad** para exprimir radiano.

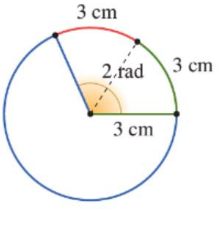
Visualiza o vídeo que mostra que o radiano não depende da circunferência considerada.

Exemplo 1:

A circunferência de raio 3 cm.

Um arco da circunferência de amplitude igual a 1 radiano (1 rad) tem comprimento igual a 3 cm.

Um arco da circunferência de amplitude igual a 2 radianos (2 rad) tem comprimento igual a 6 cm.



Adaptado de *Dimensões 11,* Santillana

Com a unidade de medida radiano é muito simples calcular o comprimento do arco de uma circunferência.

Copia para o teu caderno as informações anteriores.

Um ângulo ao centro de amplitude 1 radiano determina um arco de circunferência de comprimento igual ao raio.

Dada uma circunferência de **raio $\boldsymbol{r}$**, o comprimento $\boldsymbol{c}$ (numa dada unidade de medida) de um arco determinado por um ângulo ao centro de amplitude $\boldsymbol{a}$ **rad**, é tal que,

$$\frac{2\pi}{a} = \frac{2\pi r}{c} \Leftrightarrow c = \frac{2\pi r \times a}{2\pi} \Leftrightarrow c = a \times r$$

Então, $\boxed{c = a \times r}$

TAREFA 1

As rodas de uma bicicleta têm 56 cm de diâmetro.

Qual é a distância percorrida pela bicicleta quando um dos raios de uma roda descreve um ângulo de amplitude igual a 30 radianos?

Admite que as rodas não derrapam.

ETAPA 2

Procura no teu manual escolar a resposta à seguinte questão: **Qual é a amplitude de um ângulo giro?**

Seja g a amplitude, em radianos, do ângulo giro e r o raio de uma circunferência, então:

$$\frac{1}{r} = \frac{g}{2\pi r} \Leftrightarrow g = \frac{2\pi r}{r} \Leftrightarrow g = 2\pi$$

A amplitude do ângulo giro é $\boldsymbol{2\pi}$ **radianos** e como, utilizando como unidade de medida o grau, a sua amplitude é 360, tem-se assim a seguinte correspondência:

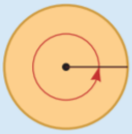
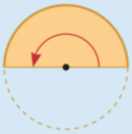
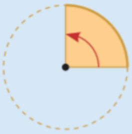
$$\boxed{360° \leftrightarrow 2\pi \text{ rad}}$$

Procura no teu manual escolar as respostas às seguintes questões: **Qual é a unidade de medida angular do sistema sexagesimal? E do sistema circular?**

Sistema circular

O grau é a unidade de medida angular do **sistema sexagesimal**.

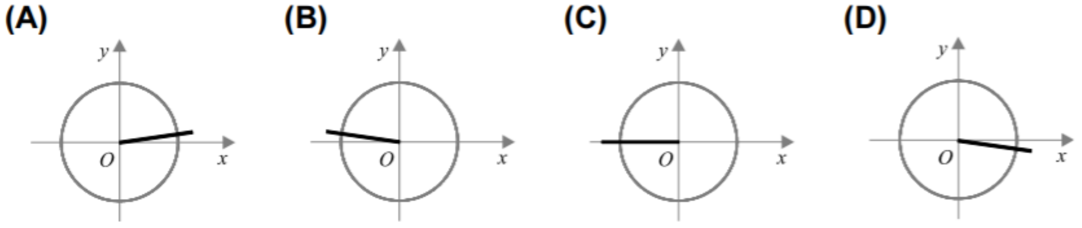
O radiano é a unidade de medida angular do **sistema circular**.

Arco				
Graus	360°	180°	90°	270°
Radianos	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$

TAREFA 2

Em cada uma das figuras seguintes, está representado, no círculo trigonométrico, a traço grosso, o lado extremidade de um ângulo cujo lado origem é o semieixo positivo Ox.

Em qual das figuras esse ângulo pode ter 3 radianos de amplitude? **Justifica** a tua resposta.



Fonte: Teste Intermédio 11.º ano, 2010

ETAPA 3

Procura no teu manual escolar a resposta à seguinte questão: **Como posso fazer a conversão de amplitudes de ângulos do sistema sexagesimal para o sistema circular, e vice-versa?**

Exemplo 2: Conversão para o sistema circular

$\boxed{30°}$

$$\frac{180}{\pi} = \frac{30}{x} \Leftrightarrow x = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$$

$$30° \leftrightarrow \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

Exemplo 3: Conversão para sistema sexagesimal

$\boxed{\frac{\pi}{5} \text{ rad}}$

$$\frac{\pi}{5} \text{ rad} \leftrightarrow \frac{180°}{5} = 36°$$

$$\frac{\pi}{5} \text{ rad} \leftrightarrow 36°$$

Copia para o teu caderno a informação anterior.

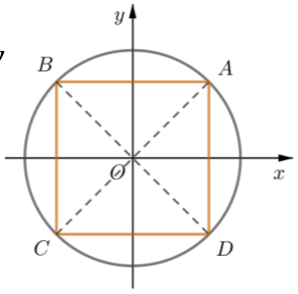
Procura no teu manual os exercícios resolvidos sobre "Noção de radiano". **Analisa-os** e **resolve-os** sozinho. Por fim, **compara** a tua resolução com a do manual e com as dos teus colegas.

TAREFA 3

Autoavalia a tua aprendizagem. **Justifica** as tuas respostas.

Item 1

Na figura ao lado está representado em referencial o.n. xOy o quadrado $[ABCD]$ inscrito na circunferência trigonométrica e de lados paralelos aos eixos coordenados.



1. Indica/Qual é o lado extremidade do ângulo α, sabendo que tem como lado origem o semieixo positivo Ox e amplitude:/?

   a) $\dfrac{3\pi}{4}$ rad

   b) $\left(\dfrac{5\pi}{4} + 2\pi\right)$ rad

2. Qual é o valor exato de:

   a) $\text{sen}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ e $\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$

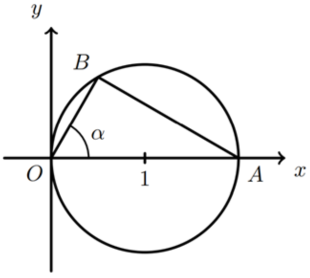
   b) $\text{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)$

Item 2

Na figura ao lado estão representados, num referencial o.n. xOy, uma circunferência e o triângulo $[OAB]$.

Sabe-se que:

- $[OA]$ é o diâmetro circunferência;
- A tem coordenadas (2, 0);
- o vértice O do triângulo $[OAB]$ coincide com a origem do referencial;
- o ponto B desloca-se ao longo da semicircunferência superior.



Para cada posição do ponto B, seja α a amplitude do ângulo AOB, com $\alpha \in]0, 90^0[$.

Mostra, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, que o perímetro do triângulo $[OAB]$ é dado, em função de α, por $2(1 + \cos\alpha + \text{sen}\,\alpha)$

Fonte: Adaptado de Exame – 2010, 1.ª Fase, IAVE

TAREFA 1

Sabe-se que:
Diâmetro: 56 cm
Amplitude do ângulo: 30 radianos

Então, o raio da roda é de 28 cm.

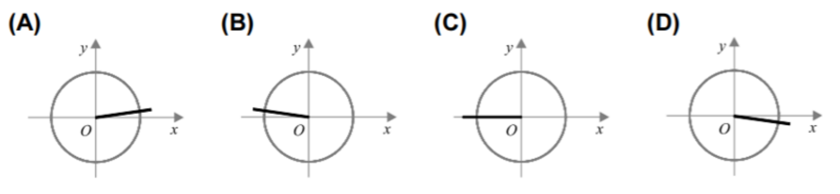
Se um ângulo de amplitude 1 radiano descreve um arco de comprimento 28 cm, então um ângulo de amplitude 30 radianos descreve um arco de amplitude:

$$30 \times 28 = 840 \text{ cm}$$

Assim, a bicicleta percorre uma distância de 8,4 metros.

TAREFA 2

Em qual das figuras esse ângulo pode ter 3 radianos de amplitude?



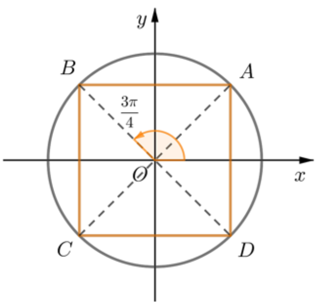
Como um ângulo raso tem amplitude π radianos e $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$ então, um ângulo com a amplitude de 3 radianos está no 2.º quadrante.

Resposta: Opção B.

TAREFA 3

Item 1

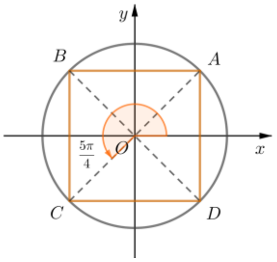
1. a) $\frac{3\pi}{4}$ rad



Como o quadrado está centrado na origem do referencial e os seus lados são paralelos ao eixos coordenados, então os seus vértices e os pontos de interseção da circunferência com os eixos coordenados **dividem a circunferência em oito arcos geometricamente iguais**, cada um com amplitude igual a $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ rad. Assim, o lado extremidade é a semirreta $\dot{O}B$.

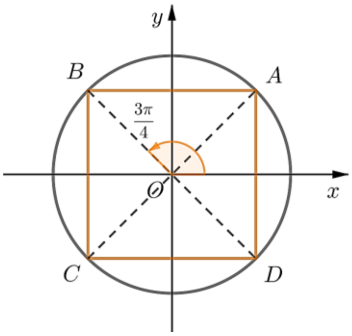
PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

1.b) $\left(\frac{5\pi}{4}+2\pi\right)\text{rad}$



O lado extremidade é a semirreta $\dot{O}C$.

2. a) $A\left(\cos\frac{\pi}{4},\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$, então $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



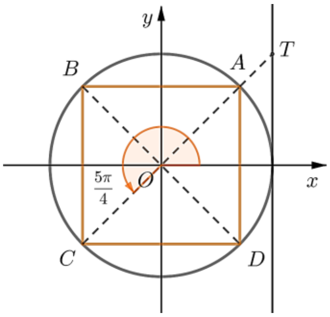
Como B é o simétrico de A relativamente ao eixo Oy, tem-se:

$B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ então,

$$\boxed{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad \text{e} \quad \boxed{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

2. b) Tem-se que,

$T\left(1,\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)$ $\qquad$ $T\,(1,1)$



Como $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

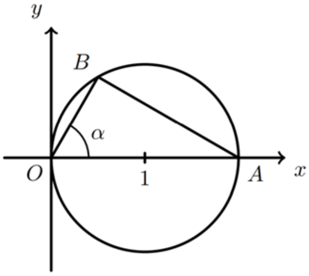
Obtemos, $\boxed{\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}\right)=1}$

Item 2

Como o triângulo está inscrito numa semicircunferência, então é retângulo. Sabemos que a hipotenusa coincide com o diâmetro e tem comprimento 2 ($\overline{OA}=2$).

Assim, recorrendo à definição de *seno*, temos:

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}\Leftrightarrow\operatorname{sen}\alpha=\frac{\overline{AB}}{2}\Leftrightarrow\overline{AB}=2\operatorname{sen}\alpha$$



Analogamente, pela definição de *cosseno*, obtemos:

$$\cos\alpha=\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{\overline{OB}}{2}\Leftrightarrow\overline{OB}=2\cos\alpha$$

$$P_{[OAB]}=\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{OB}=2+2\operatorname{sen}\alpha+2\cos\alpha$$

Logo,

Ou seja, $P_{[OAB]}=2(1+\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha)$

O QUE APRENDI?

Já sabes resolver problemas envolvendo a trigonometria?

Consegues resolver as tarefas sem ajuda?
Ainda tens dúvidas?

Se tiveres dúvidas, **visualiza** a Videoaula 9 onde encontras os exercícios explicados.

Procura no teu manual escolar os exercícios resolvidos sobre o tema "Trigonometria". **Analisa-os** e **resolve-os** sozinho. Por fim, **compara** a tua resolução com a do manual e com as dos teus colegas.

Estuda, com um colega de turma, para consolidares a tua aprendizagem.

COMO POSSO COMPLEMENTAR A APRENDIZAGEM?

Explora a sugestão de recursos para complementares a tua aprendizagem ou esclareceres dúvidas.

Em estudoautonomo.dge.mec.pt:

Videoaula 8 | Razões Trigonométricas de ângulos generalizados: resolução de tarefas

Outros recursos:

Iave.pt

Khan Academy