Estudo Autónomo

GTA | Guião de Trabalho Autónomo n.º 10

DISCIPLINA
11.º ANO

Tema 1: Geometria

Subtema 3: Redução ao 1.º Quadrante

PORQUÊ APRENDER SOBRE...?

O QUE VOU APRENDER?

COMO VOU APRENDER?

O QUE APRENDI?

COMO POSSO COMPLEMENTAR A APRENDIZAGEM?

PORQUÊ APRENDER SOBRE...?

Trigonometria

Que relações existem entre o seno e o cosseno de um qualquer ângulo generalizado?

Vamos utilizar o círculo trigonométrico na redução ao primeiro quadrante, na dedução da fórmula fundamental da Trigonometria e na resolução de problemas.

O QUE VOU APRENDER?

Redução ao 1.º quadrante

- Utilizar o círculo trigonométrico na redução ao primeiro quadrante, na dedução da fórmula fundamental da Trigonometria e na resolução de problemas.

COMO VOU APRENDER?

GTA 9: Relações entre as razões trigonométricas de alguns ângulos

GTA 10: Relações entre o seno e o cosseno na resolução de problemas

Tema 1: Geometria

Subtema 3: Redução ao 1.º Quadrante

GTA 10: Relações entre o seno e o cosseno na resolução de problemas

Objetivo:
- Utilizar o círculo trigonométrico na redução ao primeiro quadrante, na dedução da fórmula fundamental da Trigonometria e na resolução de problemas.

Modalidade de trabalho: pares ou em pequenos grupos

Recursos e materiais : caderno diário, manual escolar, *GeoGebra* e *internet*.

ETAPA 1

Já trabalhaste algumas fórmulas de «redução ao 1.º quadrante» no GTA 9.
Visualiza o vídeo e recorre a um *applet GeoGebra* *p*ara compreender a relação entre as razões trigonométricas de um ângulo generalizado α e de $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

As igualdades são válidas para qualquer ângulo α de qualquer quadrante.

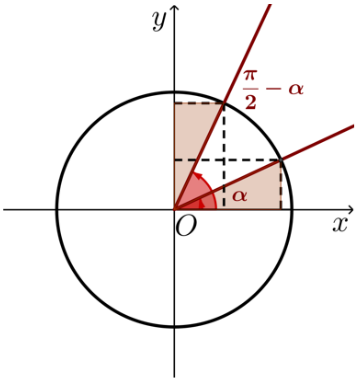
No entanto, designam-se como fórmulas trigonométricas de «redução ao 1.º quadrante», porque permitem estabelecer relações entre as razões de um ângulo de qualquer quadrante com um determinado ângulo do 1.º quadrante.

Relações entre o seno e o cosseno de α e de $\frac{\pi}{2} - \alpha$

Para qualquer ângulo generalizado α, tem-se:

$$\boxed{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha}$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha}$$



Copia para o teu caderno as informações anteriores.

ETAPA 2

Visualiza o vídeo e recorre a um *applet GeoGebra* para compreender a relação entre as razões trigonométricas de um ângulo generalizado α e de $\frac{\pi}{2}+\alpha$.

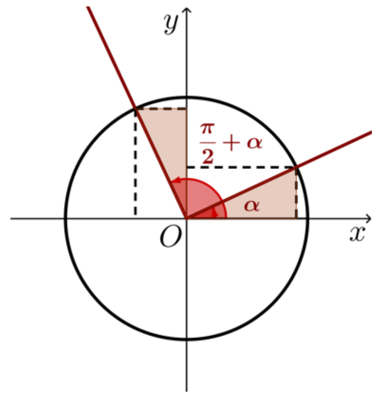
Relembra de que as relações são válidas para qualquer ângulo α, mas que, por questões práticas, se considera habitualmente o ângulo no 1.º quadrante, daí chamarem-se fórmulas de «redução ao 1.º quadrante».

Relações entre as razões trigonométricas de α e de $\frac{\pi}{2}+\alpha$

Para qualquer ângulo generalizado α, tem-se:

$$\boxed{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha}$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{sen}\alpha}$$

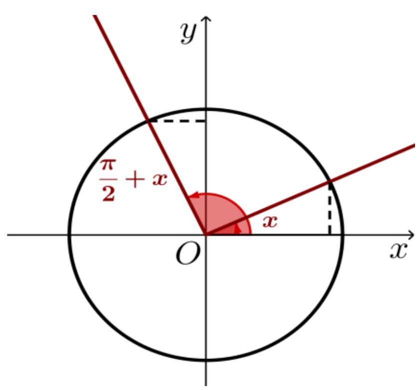


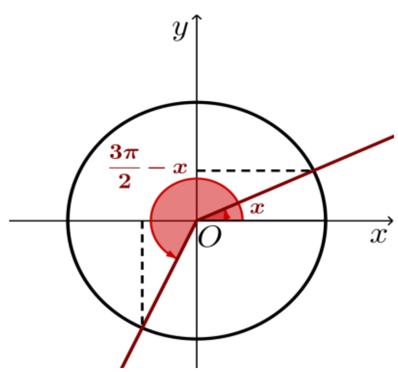
Copia para o teu caderno a informação anterior.

Exemplo 1

Simplifica a seguinte expressão: $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\operatorname{sen} x$$





Como: $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$ e $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\operatorname{sen} x$

Então: $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\cos x+\operatorname{sen} x$

TAREFA 1

Autoavalia a tua aprendizagem respondendo aos itens seguintes.

ITEM 1

Seja $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Qual das expressões seguintes designa um número positivo?

(A) $\cos(\pi - x)$ **(B)** $\operatorname{sen}(\pi - x)$

(C) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ **(D)** $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

Adaptado de Teste Intermédio 11.º ano, 2008, IAVE

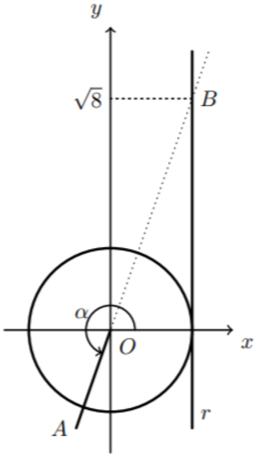
ITEM 2

Determina o valor de $3 - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, sabendo que:

- $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
- $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\frac{4}{5}$

Adaptado de Teste Intermédio 11.º ano, 2011, IAVE

ITEM 3



Na figura ao lado, estão representados, em referencial o.n. xOy:

- o círculo trigonométrico e a reta r, de equação $x = 1$;
- o ângulo α, com lado origem o semieixo positivo Ox e lado extremidade a semirreta $\dot{O}A$;
- o ponto B, interseção do prolongamento da semirreta $\dot{O}A$ com a reta r.

Sabe-se que a ordenada de B é $\sqrt{8}$.

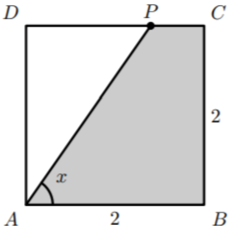
Sem recorrer à calculadora, determina o valor de:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + 2\cos(3\pi - \alpha)$$

Adaptado de Teste Intermédio 11.º ano, 2007, IAVE

ITEM 4

Na figura ao lado, está representado o quadrado $[ABCD]$ de lado 2.



Considera um ponto P que se desloca ao longo do lado $[CD]$, nunca coincidindo com C nem com D.

Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo BAP $\left(x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

Determina a área da região sombreada.

Adaptado de Teste Intermédio 11.º ano, 2010, IAVE

TAREFA 2

Procura no teu manual os exercícios resolvidos sobre "**Relações entre o seno e o cosseno**".

Analisa-os e **resolve-os** sozinho. Por fim, **compara** a tua resolução com a do manual e com as dos teus colegas.

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

TAREFA 1

ITEM 1

Como: $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, então $\operatorname{sen} x > 0$ e $\cos x > 0$

$\boxed{\cos(\pi - x) = -\cos x}$ ✗
negativo

$\boxed{\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x}$ ✓
positivo

$\boxed{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{sen} x}$ ✗
negativo

$\boxed{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x}$ ✗
negativo

Resposta: Opção B.

ITEM 2

Se $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\frac{4}{5}$

Então,

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\frac{4}{5} \Leftrightarrow -\operatorname{sen} \alpha = -\frac{4}{5} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{5}$$

$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, então:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm\frac{3}{5}$$

Como α é um ângulo do 1.º quadrante, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

Temos:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{5} \qquad\qquad \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

Assim,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

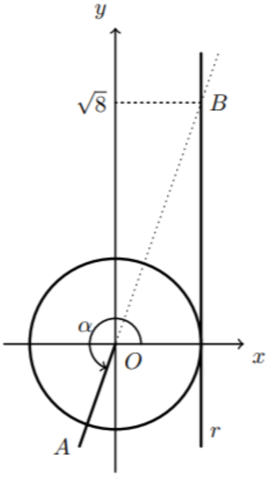
Obtemos:

$$3 - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

ITEM 3

Sem recorrer à calculadora, **determina** o valor de:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + 2\cos(3\pi - \alpha)$$



Como se trata do círculo trigonométrico e $B\left(1, \sqrt{8}\right)$, tem-se que $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{8}$

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + 2\cos(3\pi - \alpha) = \cos \alpha - 2\cos \alpha = -\cos \alpha$

Mas,

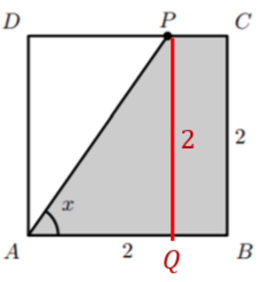
$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, então $1 + \left(\sqrt{8}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{9}$

Como α pertence ao 3.º quadrante, $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{9}} = -\frac{1}{3}$

Assim,

$$\boxed{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + 2\cos(3\pi - \alpha) = -\cos \alpha = \frac{1}{3}}$$

ITEM 4



Como, $\operatorname{tg} x = \frac{\overline{PQ}}{\overline{AQ}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{2}{\overline{AQ}} \Leftrightarrow \overline{AQ} = \frac{2}{\operatorname{tg} x}$ e $\overline{AQ} = \overline{DP}$

Temos, $A_{[ADP]} = \frac{2 \times \overline{DP}}{2} = \frac{2 \times \frac{2}{\operatorname{tg} x}}{2} = \frac{2}{\operatorname{tg} x}$ e $A_{[ABCD]} = 2^2 = 4$

Assim, a área da região sombreada é: $4 - \frac{2}{\operatorname{tg} x}$

O QUE APRENDI?

Já sabes resolver problemas envolvendo as **relações entre seno e cosseno de alguns ângulos**?

Consegues resolver as tarefas sem ajuda?
Ainda tens dúvidas?

Se tiveres dúvidas, **visualiza** a Vídeoaula 11 onde encontras os exercícios explicados.

Procura no teu manual escolar os exercícios resolvidos sobre o tema "**Relações entre seno e cosseno de alguns ângulos**". **Analisa-os** e **resolve-os** sozinho. Por fim, **compara** a tua resolução com a do manual e com as dos teus colegas.

Estuda, com um colega de turma, para consolidares a tua aprendizagem.

COMO POSSO COMPLEMENTAR A APRENDIZAGEM?

Explora a sugestão de recursos para complementares a tua aprendizagem ou esclareceres dúvidas.

Em estudoautonomo.dge.mec.pt:

Vídeoaula 8 | Razões Trigonométricas de ângulos generalizados: resolução de tarefas

Vídeoaula 9 | Noção de radiano. Medidas de amplitudes de ângulos em radianos

Vídeoaula 10 | Fórmulas trigonométricas de "redução ao primeiro quadrante"

Outros recursos:

lave.pt

Khan Academy