GTA | Guião de Trabalho Autónomo n.º 9

DISCIPLINA
11.º ANO

Tema 1: Geometria
Subtema 3: Redução ao 1.º Quadrante

PORQUÊ APRENDER SOBRE...?

O QUE VOU APRENDER?

COMO VOU APRENDER?

O QUE APRENDI?

COMO POSSO COMPLEMENTAR A APRENDIZAGEM?

PORQUÊ APRENDER SOBRE...?

Trigonometria

Vem resolver problemas variados, da redução ao primeiro quadrante, utilizando o círculo trigonométrico.

Vem descobrir!

O QUE VOU APRENDER?

Redução ao 1.º quadrante

- Utilizar o círculo trigonométrico na redução ao primeiro quadrante, na dedução da fórmula fundamental da Trigonometria e na resolução de problemas.

COMO VOU APRENDER?

GTA 9: Relações entre as razões trigonométricas de alguns ângulos

GTA 10: Relações entre o seno e o cosseno na resolução de problemas

Tema 1: Geometria

Subtema 3: Redução ao 1.º Quadrante

GTA 9: Relações entre as razões trigonométricas de alguns ângulos

Objetivo:
- Utilizar o círculo trigonométrico na redução ao primeiro quadrante, na resolução de problemas.

Modalidade de trabalho: pares ou em pequenos grupos

Recursos e materiais : caderno diário, manual escolar, *GeoGebra* e *internet*.

ETAPA 1

Procura no teu manual escolar, no tema da Geometria, a resposta à seguinte questão: **Existem relações entre as razões trigonométricas de alguns ângulos?**

Visualiza o vídeo e recorre a um *applet GeoGebra* para compreender o que é a relação entre as razões trigonométricas de um ângulo generalizado α e de $-\alpha$.

Já sabes responder à questão que te coloquei?
As igualdades são válidas para qualquer ângulo α de qualquer quadrante.

No entanto, designam-se fórmulas trigonométricas de «redução ao 1.º quadrante», porque permitem estabelecer relações entre as razões de um ângulo de qualquer quadrante com um determinado ângulo do 1.º quadrante.

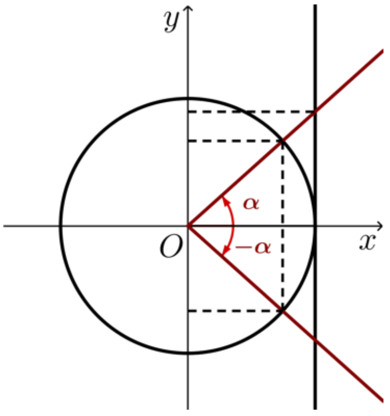
Relações entre as razões trigonométricas de α e de $-\alpha$

Para qualquer ângulo generalizado α, tem-se:

$$\boxed{\text{sen}\,(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha}$$

$$\boxed{\cos\,(-\alpha) = \cos\alpha}$$

$$\boxed{\text{tg}\,(-\alpha) = -\,\text{tg}\,\alpha}$$

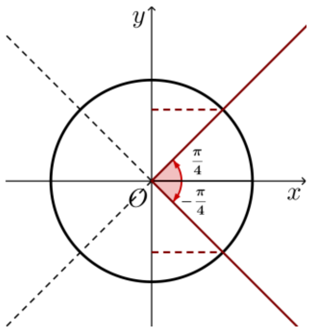


Copia para o teu caderno as informações anteriores.

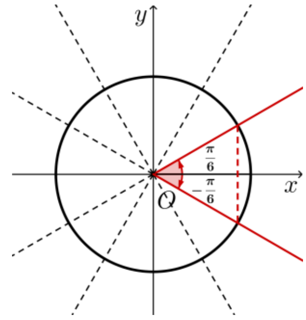
Exemplo 1

Determina o valor exato de: $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Considera os círculos trigonométricos e a tabela:



x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{sen} x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$



Como: $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Então: $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$

ETAPA 2

Visualiza o vídeo e recorre a um *applet GeoGebra para* compreender o que é a relação entre as razões trigonométricas de um ângulo generalizado α e de $\pi-\alpha$.

Relembra de que as relações são válidas para qualquer ângulo α, mas que, por questões práticas, se considera habitualmente o ângulo no 1.º quadrante, daí se chamarem fórmulas de «redução ao 1.º quadrante».

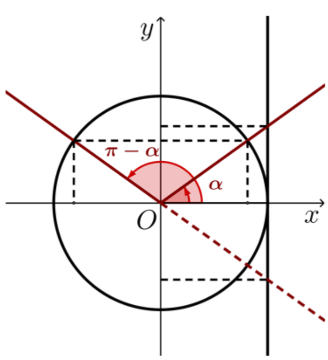
Relações entre as razões trigonométricas de α e de $\pi-\alpha$

Para qualquer

$\boxed{\operatorname{sen}(\pi-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha}$

$\boxed{\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha}$

$\boxed{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha}$

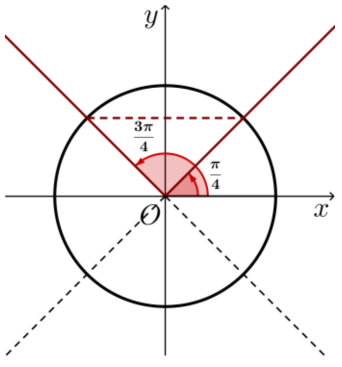


Copia para o teu caderno a informação anterior.

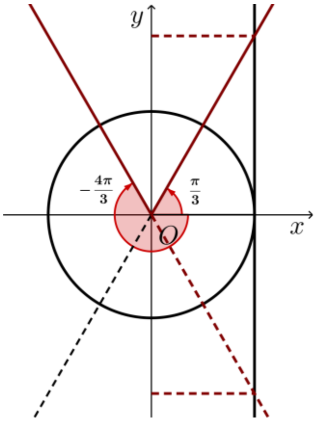
Exemplo 2

Determina o valor exato de: $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

Observa os círculos trigonométricos e a tabela:



x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sen x	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg x	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$



Como: $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\operatorname{tg}\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

Então: $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{2}$

ETAPA 3

Visualiza o vídeo e recorre a um *applet GeoGebra para* compreender o que é a relação entre as razões trigonométricas de um ângulo generalizado α e de $\pi + \alpha$.

Recorda que as relações são válidas para qualquer ângulo α, mas que se considera habitualmente o ângulo no 1.º quadrante, daí se chamarem fórmulas de «redução ao 1.º quadrante».

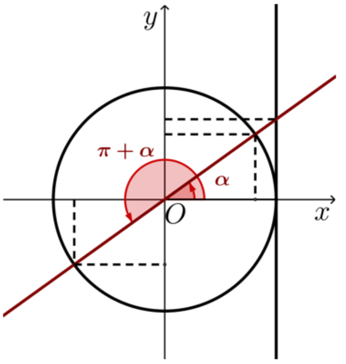
Relações entre as razões trigonométricas de α e de $\pi + \alpha$

Para qualquer ângulo generalizado α, tem-se:

$\boxed{\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha}$

$\boxed{\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha}$

$\boxed{\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha}$



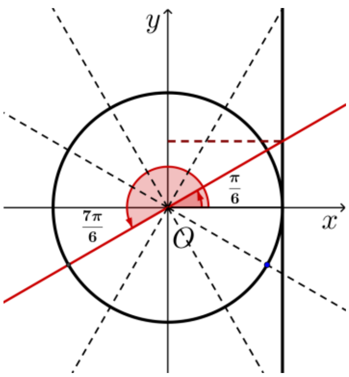
Copia para o teu caderno a informação anterior.

Exemplo 3

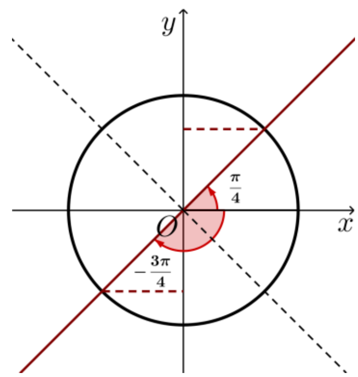
Determina o valor exato de: $2\text{tg}\left(\frac{7\pi}{6}\right) - \text{sen}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

Repara: $\text{tg}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \text{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$ **e** $\text{sen}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \text{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Observa os círculos trigonométricos e a tabela:



x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\text{sen}\, x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\text{tg}\, x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$



Como: $\text{tg}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \text{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \text{tg}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\text{sen}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Então: $2\text{tg}\left(\frac{7\pi}{6}\right) - \text{sen}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6}$

TAREFA 1

Determina o valor exato de:

$$\text{sen}\left(\frac{10\pi}{3}\right) - \text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$$

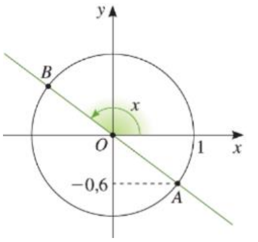
TAREFA 2

Simplifica a expressão:

$$\text{sen}\,(2\pi - x) + 2\text{sen}\,(\pi + x) - \cos(x - \pi)$$

TAREFA 3

Autoavalia a tua aprendizagem. **Justifica** a tua resposta.



Na Figura está representado, em referencial o.n. xOy, o círculo trigonométrico.

Sabe-se que:

- $[AB]$ é um diâmetro da circunferência;
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo que tem como lado origem o semieixo positivo Ox e lado extremidade $\dot{O}B$;
- a ordenada do ponto A é $-0{,}6$.

Determina:

a) $\cos(\pi + x)$

b) $\operatorname{tg} x$

c) $\operatorname{sen}\,(-x + 5\pi) + \cos(-x)$

Fonte: Adaptado de Dimensões 11- Santillana

TAREFA 4

Procura no teu manual os exercícios resolvidos sobre "**Relações entre as razões trigonométricas de alguns ângulos**".

Analisa-os e **resolve-os** sozinho. Por fim, **compara** a tua resolução com a do manual e com as dos teus colegas.

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

TAREFA 1

Como,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(2\pi + \frac{4\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{sen} x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

$$\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{6\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos(-\pi - \frac{\pi}{6})$$

$$= -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Então, $\operatorname{sen}\left(\frac{10\pi}{3}\right) - \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

$$= \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} - 3\sqrt{3}}{2}$$

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

TAREFA 2

Temos:

$\text{sen}\,(2\pi - x) = -\text{sen}\,x$ $\quad$ $\text{sen}\,(\pi + x) = -\text{sen}\,x$ $\quad$ $\cos(x - \pi) = -\cos x$

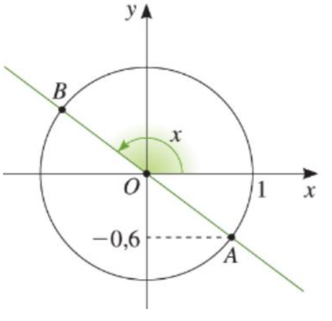
Então:

$$\text{sen}\,(2\pi - x) + 2\text{sen}\,(\pi + x) - \cos(x - \pi) =$$

$$= -\text{sen}\,x - 2\text{sen}\,x + \cos x =$$

$$= -3\text{sen}\,x + \cos x$$

TAREFA 3



a) $\cos(\pi + x)$

Os pontos A e B têm ordenadas simétricas (simetria relativamente à origem).
Então: $\text{sen}\,x = 0{,}6$

Substituindo na Fórmula fundamental da trigonometria,

$$(\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1)$$

Obtemos:

Como x é um ângulo do 2.º quadrante, $\cos x < 0$

$$\cos x = -0{,}8$$

Então:

$$\cos(\pi + x) = -\cos x = 0{,}8$$

b) $\text{tg}\,x$

Sabemos que: $\text{sen}\,x = 0{,}6$ e $\cos x = -0{,}8$

Então: $\text{tg}\,x = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x} = \frac{0{,}6}{-0{,}8} = -\frac{3}{4}$

$$\text{tg}\,x = -\frac{3}{4}$$

c) $\text{sen}\,(-x + 5\pi) + \cos(-x)$

Como:

$$\text{sen}\,(-x + 5\pi) = \text{sen}(\pi - x) = \text{sen}\,x = 0{,}6$$

$$\cos(-x) = \cos x = -0{,}8$$

Então:

$$\text{sen}\,(-x + 5\pi) + \cos(-x) = 0{,}6 - 0{,}8 = -0{,}2$$

O QUE APRENDI?

Já sabes resolver problemas envolvendo as **relações entre as razões trigonométricas de alguns ângulos**?

Consegues resolver as tarefas sem ajuda?
Ainda tens dúvidas?

Se tiveres dúvidas, **visualiza** a Vídeoaula 10 onde encontras os exercícios explicados.

Procura no teu manual escolar os exercícios resolvidos sobre o tema "**Relações entre as razões trigonométricas de alguns ângulos**". **Analisa-os** e **resolve-os** sozinho. Por fim, **compara** a tua resolução com a do manual e com as dos teus colegas.

Estuda, com um colega de turma, para consolidares a tua aprendizagem.

COMO POSSO COMPLEMENTAR A APRENDIZAGEM?

Explora a sugestão de recursos para complementares a tua aprendizagem ou esclareceres dúvidas.

Em estudoautonomo.dge.mec.pt:

Vídeoaula 8 | Razões Trigonométricas de ângulos generalizados: resolução de tarefas

Vídeoaula 9 | Noção de radiano. Medidas de amplitudes de ângulos em radianos |

Outros recursos:

Iave.pt

Khan Academy