GTA | Guião de Trabalho Autónomo n.º 11

DISCIPLINA
11.º ANO

Tema 1: Geometria

Subtema 4: Funções trigonométricas

- PORQUÊ APRENDER SOBRE...?
- O QUE VOU APRENDER?
- COMO VOU APRENDER?
- O QUE APRENDI?
- COMO POSSO COMPLEMENTAR A APRENDIZAGEM?

PORQUÊ APRENDER SOBRE...?

Começa por explorar a função trigonométrica seno, identificando fenómenos periódicos e faz o estudo da função $sen(x)$.
Vem descobrir!

O QUE VOU APRENDER?

Funções trigonométricas seno, cosseno e tangente e fenómenos periódicos

- Reconhecer, analisar e aplicar as funções trigonométricas $sen(x)$, $cos(x)$ e $tg(x)$ na modelação de fenómenos periódicos.
- Identificar fenómenos periódicos e usar os conceitos de período, máximo, mínimo, amplitude e frequência, no estudo dos fenómenos periódicos.
- Determinar valores aproximados de zeros, extremos e outros pontos relevantes, num contexto de resolução de problemas, com recurso à tecnologia gráfica.

COMO VOU APRENDER?

GTA 11: Função seno

GTA 12: Função cosseno

GTA 13: Função tangente

GTA 14: Resolução de problemas com funções trigonométricas

Tema 1: Geometria

Subtema 4: **Funções trigonométricas**

GTA 11: Função Seno

Objetivo:
- Reconhecer, analisar e aplicar a função trigonométrica $sen(x)$, na modelação de fenómenos periódicos.

Modalidade de trabalho: pares ou em pequenos grupos.

Recursos e materiais : caderno diário, manual escolar, calculadora gráfica ou *GeoGebra* e *internet*.

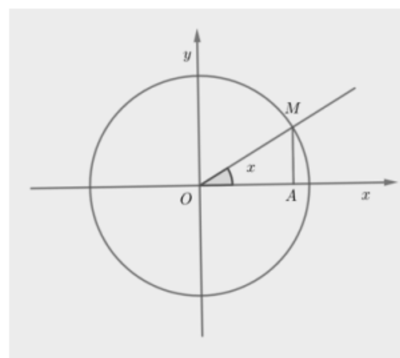
Explora a tarefa seguinte, no teu caderno.

TAREFA 1

Considera um ângulo de amplitude x, em radianos, no círculo trigonométrico.

Seja f a função que associa a cada amplitude, em radianos, do ângulo AOM o valor do seu respetivo seno:

$$f: x \mapsto sen\, x$$



Acede à apliqueta do GeoGebra: https://www.geogebra.org/m/kjb8knwy.

Para cada ponto representado, a abcissa, x, corresponde ao valor da amplitude de um ângulo, em radianos, e a ordenada o respetivo valor do seno ($sen\, x$).

No referencial cartesiano são marcados os pontos de coordenadas (x, $sen\, x$), à medida que são preenchidos, na tabela, os valores das coordenadas.

1. **Preenche** os espaços vazios, de cada ponto, na tabela, usando apenas valores pertencentes a $[0, 2\pi]$, para a amplitude do ângulo.
2. **Altera** os valores das abcissas dos pontos para os valores simétricos dos que consideraste na questão anterior. **Descreve** o que observas.
3. **Insere** agora valores para as amplitudes dos ângulos maiores que 2π.
   Descreve o que observas.
4. **Desenha** no teu caderno um esboço do gráfico da função f.

DGE, Coletânea de tarefas das turmas piloto (Matemática A 11.º ano), 2024/2025, página 34.

TAREFA 2

Partilha as tuas respostas à tarefa 1 com as dos teus colegas.
Ainda **tens** dúvidas?

Visualiza o vídeo pela voz do professor Emanuel Martinho "*Sines And Cosines Part I Project MATHEMATICS!*", para conhecer a função trigonométrica $sen(x)$.

Procura no teu manual escolar, no tema da Geometria, o subtema "Função seno" e como se faz o estudo de uma função seno.

TAREFA 3
Copia para o teu caderno a síntese seguinte:

ETAPA 1

Função trigonométrica seno

Chama-se **função seno** à função real de variável real que a cada $x \in \mathbb{R}$ faz corresponder $\operatorname{sen} x$, sendo x a medida da amplitude de um ângulo generalizado, em radianos.

O gráfico de uma função $\operatorname{sen} x$ está representado na Figura 1.

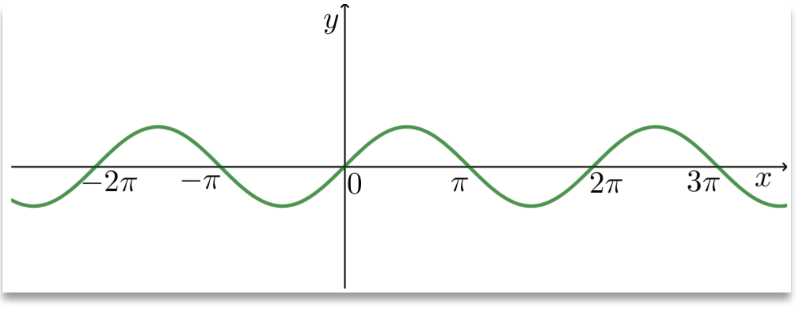
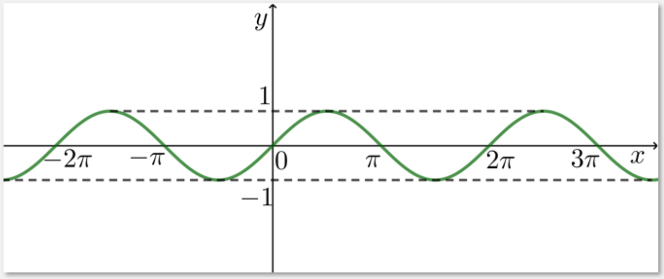


Figura 1 – Gráfico de uma função seno

ETAPA 2

Função trigonométrica seno: Domínio e contradomínio

Como existe $\operatorname{sen} x$ para qualquer valor de x real tem-se que o domínio da função é $\mathbb{R}$. Por outro lado, como $-1 \leq sen\ x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ o contradomínio é $[-1, 1]$ (Figura 2).



Domínio: $\mathbb{R}$

Contradomínio: $[-1, 1]$

$\boldsymbol{-1 \leq \text{sen}\, x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}}$

Figura 2 – Gráfico de uma função seno

ETAPA 3

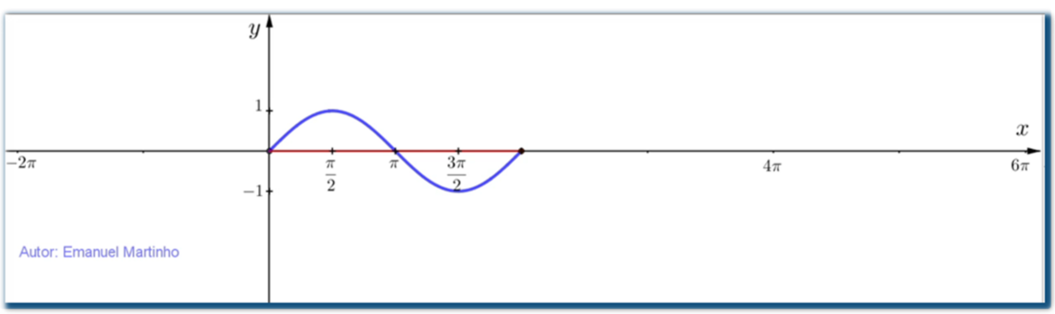
Função trigonométrica seno: Periodicidade

Qual é o período da função sen x?

Visualiza o vídeo e **obtém** a resposta à questão anterior.

Em alternativa**, procura**, no teu manual no tema da Geometria, o subtema "Função sen x".

> A função sen x é uma função periódica de período positivo mínimo $\mathbf{2\pi}$.
>
> $$\textbf{sen}\,(\boldsymbol{x} + \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}) = \textbf{sen}\,\boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$$



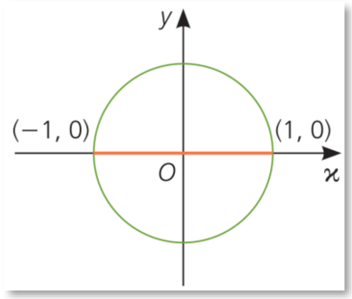
ETAPA 4

Função trigonométrica seno: Zeros

Os **zeros da função sen x** são os números reais que correspondem a ângulos cujo lado extremidade está sobre o eixo das abcissas.

Recorda que, recorrendo ao círculo trigonométrico que, os zeros da função sen x são os números reais que correspondem a ângulos cujo lado extremidade está sobre o eixo das abcissas.

Observa a Figura 3:



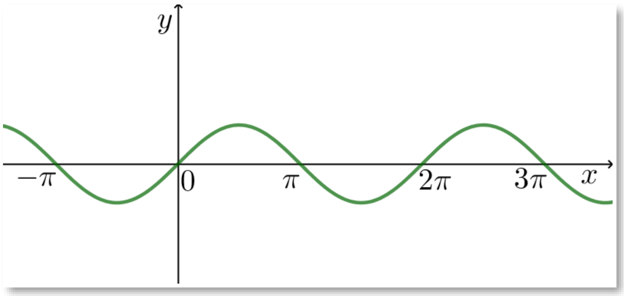
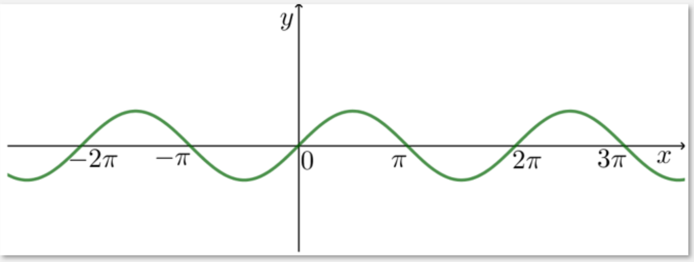


Figura 3 – Círculo trigonométrico e gráfico da função seno

Na parte do gráfico da função $\operatorname{sen} x$ encontras os zeros “visíveis”.

Podes concluir que,

> Os zeros da função $\operatorname{sen} x$ são os números reais da forma $k\pi, k \in \mathbb{Z}$.



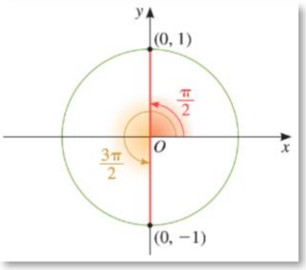
$$\operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x = k\pi, k \in \mathbb{Z}}_{\text{Expressão geral dos zeros}}$$

ETAPA 5

Função trigonométrica seno: Extremos

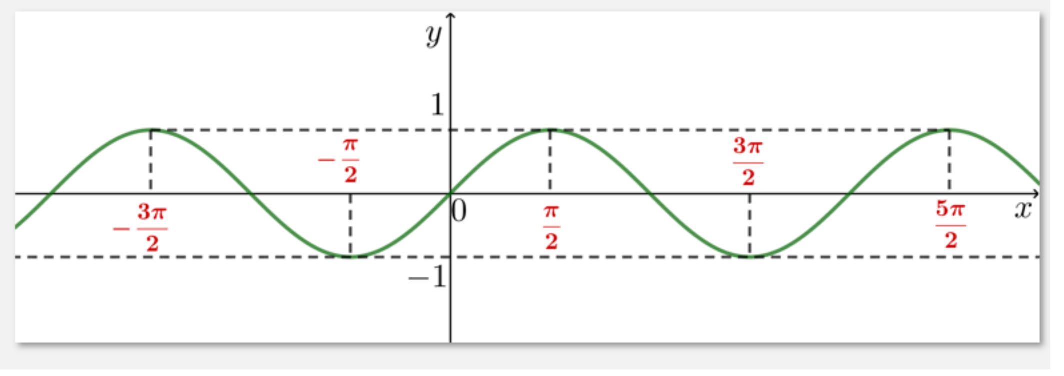
Como o contradomínio da função $\operatorname{sen} x$ é $[-1, 1]$, esta função admite **máximo absoluto $\mathbf{1}$** e **mínimo absoluto $\mathbf{-1}$**.

Recorre ao círculo trigonométrico e **localiza** os lados extremidade dos ângulos onde o $\operatorname{sen} x$ é $\mathbf{-1}$ ou $\mathbf{1}$.



Observa parte do gráfico da função e **localiza** os maximizantes e os minimizantes “visíveis”.

Como a função $\operatorname{sen} x$ tem período 2π, tem-se que:



Ou seja, $\boldsymbol{\operatorname{sen} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$ **e** $\boldsymbol{\operatorname{sen} x = -1 \Leftrightarrow = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

ETAPA 6

Função trigonométrica seno: Paridade

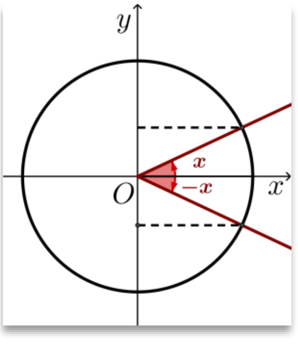
A função $\operatorname{sen} x$ é par ou ímpar?

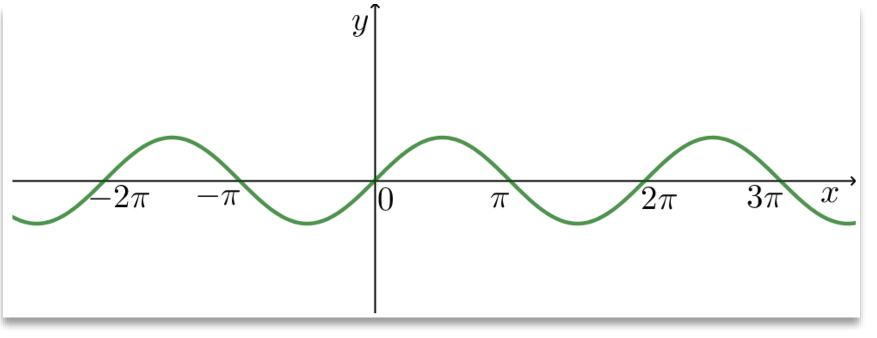
Visualiza o vídeo e **obtém** a resposta à questão anterior.

Em alternativa**, procura** no teu manual, no tema da Geometria, o subtema “Função $\operatorname{sen} x$”.

Recorda que, a partir do círculo trigonométrico, os senos de $-x$ e x são simétricos.

Tal como visualizaste no vídeo, o gráfico da função $\operatorname{sen} x$ apresenta uma simetria relativamente à origem do referencial.





Então, conclui-se:

A função $\operatorname{sen} x$ é uma **função ímpar**, porque $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x, \forall x \in \mathbb{R}$

Copia para o teu caderno a informação anterior.

TAREFA 4

Autoavalia a tua aprendizagem. **Justifica** a tua resposta.

Item 1

Considera as funções reais de variável real definidas por:

$$f(x) = sen\, x + 1 \qquad g(x) = 3sen\, x \qquad h(x) = sen(2x)$$

O gráfico de cada uma destas funções é imagem do gráfico de $y = \text{sen}\, x$ por uma transformação geométrica.

Identifica, para cada função, essa transformação e esboça o respetivo gráfico.

Item 2

Considera a função real de variável real definida por:

$$f(x) = sen\left(\frac{x}{2}\right)$$

Determina uma expressão geral dos zeros de f.

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

TAREFA 1

1. Exemplo de tabela

x	$sen(x)$	Ponto
0	$sen(0) = 0$	(0; 0)
$\frac{\pi}{2}$	$sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$	$(\frac{\pi}{2}; 1)$
π	$sen(\pi) = 0$	(π; 0)
$\frac{3\pi}{2}$	$sen\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$	$(\frac{3\pi}{2}; -1)$
2π	$sen(2\pi) = 0$	(2π; 0)

2.

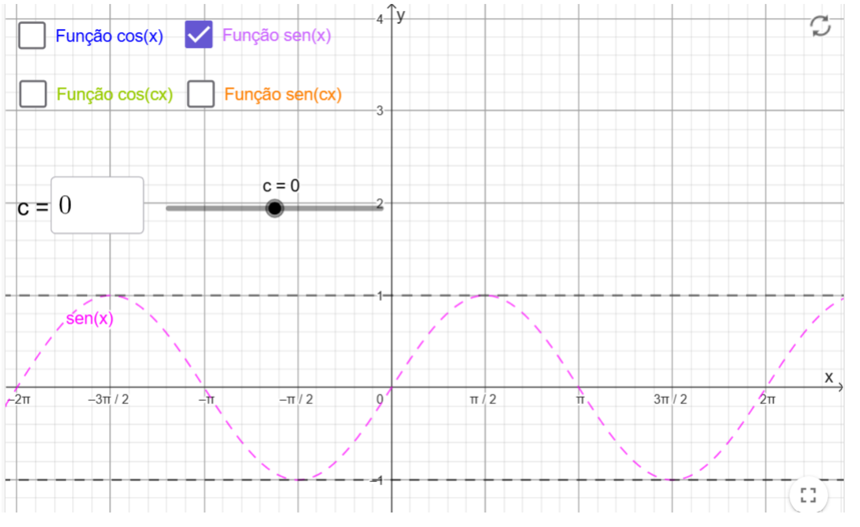
$-x$	$sen(-x)$	Ponto
0	$sen(0) = 0$	(0; 0)
$-\frac{\pi}{2}$	$sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$	$(-\frac{\pi}{2}; -1)$
$-\pi$	$sen(-\pi) = 0$	($-\pi$; 0)
$-\frac{3\pi}{2}$	$sen\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$	$(-\frac{3\pi}{2}; 1)$
-2π	$sen(-2\pi) = 0$	(-2π; 0)

Conclusão: os senos de $-x$ e x são simétricos.

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

3. Verifica-se que, para $\forall x \in \mathbb{R}\ e\ x > 2\pi,\ -1 \leq sen\ x \leq 1, \forall x \in,$ pelo que o contradomínio da função seno é $[-1, 1]$.

4. Por exemplo:

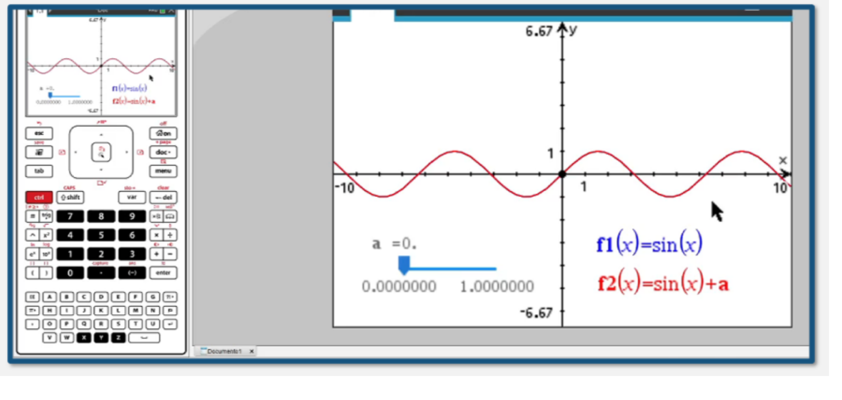


TAREFA 4

Item 1

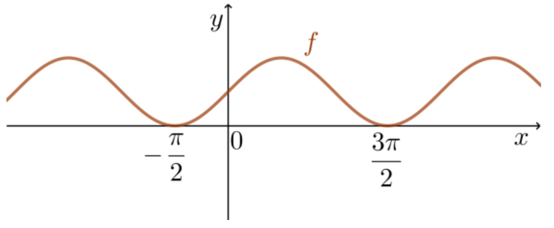
Considera a função: $f(x) = \text{sen}\ x + 1$

Sabes que o gráfico de f é a imagem do gráfico de $y = sen\ x$ pela **translação vertical** associada ao vetor $\vec{u}\ (0,1)$. **Utiliza** a calculadora gráfica ou o *GeoGebra* para representar graficamente as duas funções. Visualiza o vídeo.



PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

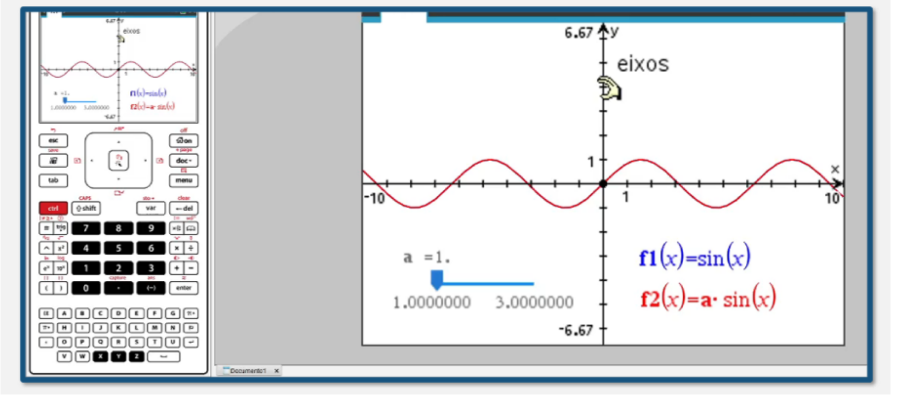
Observa o gráfico de f que é a imagem do gráfico de $y = \text{sen}\, x$ pela **translação vertical** associada ao vetor $\vec{u}\ (0,1)$.



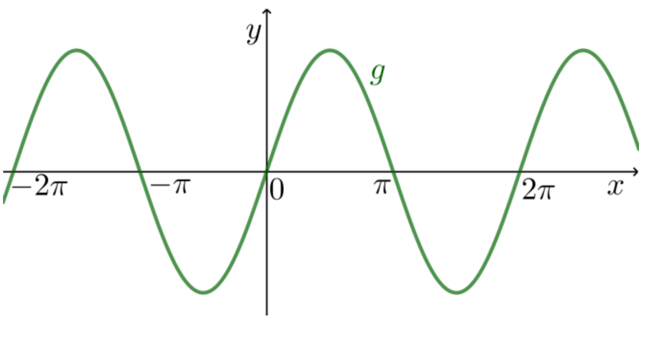
Podes concluir que: $D_f = \mathbb{R}$ e $D'_f = [-1+1, 1+1] = [0,2]$

Considera, agora, a função: $g(x) = 3\text{sen}\, x$

O gráfico de g é a imagem do gráfico de $y = \text{sen}\, x$ pela **dilatação vertical** de coeficiente 3. **Utiliza** a calculadora gráfica ou o *GeoGebra* para representar graficamente as duas funções. Visualiza o vídeo.



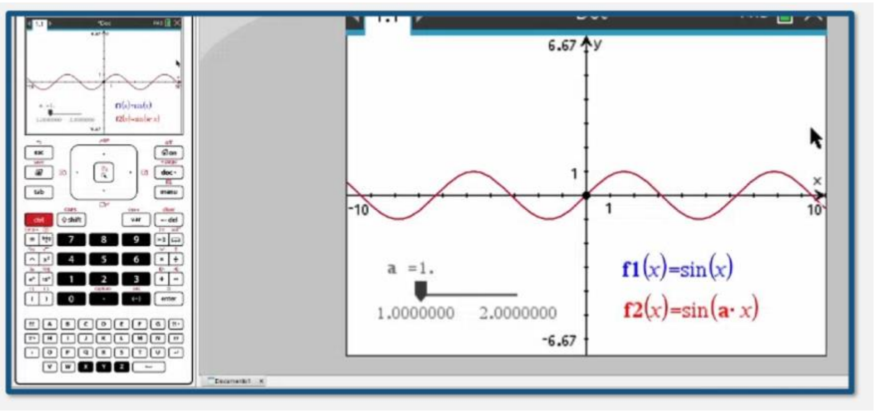
Observa o gráfico de g que é a imagem do gráfico de $y = \text{sen}\, x$ pela **dilatação vertical** de coeficiente 3.



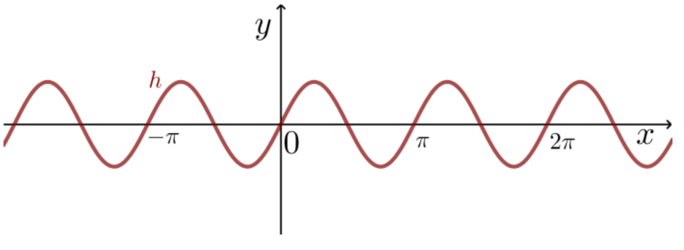
Podes concluir que: $D_g = \mathbb{R}$ e $D'_g = [-1 \times 3, 1 \times 3] = [-3,3]$

Considera, por fim, a função: $h(x) = \text{sen}\,(2x)$

O gráfico de h é a imagem do gráfico de $y = \text{sen}\,x$ pela **contração horizontal** de coeficiente $\frac{1}{2}$. **Utiliza** a calculadora gráfica ou o *GeoGebra* para representar graficamente as duas funções. Visualiza o vídeo.



Observa o gráfico de h que é a imagem do gráfico de $y = \text{sen}\,x$ pela **contração horizontal** de coeficiente $\frac{1}{2}$.



Podes concluir que: $D_h = \mathbb{R}$, $D'_h = [-1, 1]$ e período: $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$

Item 2

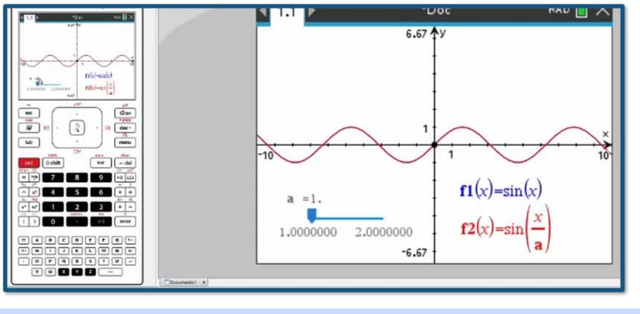
Determina uma expressão geral dos zeros de f, real de variável real definida por:

$$f(x) = sen\left(\frac{x}{2}\right)$$

Sabes que, a expressão geral dos zeros da função seno é: $k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Então, $sen\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ é a expressão geral dos zeros de f.

Utiliza a calculadora gráfica ou o *GeoGebra* para representar graficamente as duas funções. **Visualiza** o vídeo com a proposta de resolução.



O QUE APRENDI?

Já sabes resolver problemas envolvendo as **relações entre as razões trigonométricas de alguns ângulos**?

Consegues resolver as tarefas sem ajuda?
Ainda tens dúvidas?

Se tiveres dúvidas, **visualiza** a Videoaula 10 onde encontras os exercícios explicados.

Procura, no teu manual escolar, os exercícios resolvidos sobre o tema "**Relações entre as razões trigonométricas de alguns ângulos**". **Analisa-os** e **resolve-os** sozinho. Por fim, **compara** a tua resolução com a do manual e com as dos teus colegas.

Estuda, com um colega de turma, para consolidares a tua aprendizagem.

COMO POSSO COMPLEMENTAR A APRENDIZAGEM?

Explora a sugestão de recursos para complementares a tua aprendizagem ou esclareceres dúvidas.

Em estudoautonomo.dge.mec.pt:

Videoaula 8 | Razões Trigonométricas de ângulos generalizados: resolução de tarefas

Videoaula 9 | Noção de radiano. Medidas de amplitudes de ângulos em radianos |

Outros recursos:

Iave.pt

Khan Academy