GTA | Guião de Trabalho Autónomo n.º 12

DISCIPLINA
11.º ANO

Tema 1: Geometria
Subtema 4: Funções trigonométricas

PORQUÊ APRENDER SOBRE...?

O QUE VOU APRENDER?

COMO VOU APRENDER?

O QUE APRENDI?

COMO POSSO COMPLEMENTAR A APRENDIZAGEM?

PORQUÊ APRENDER SOBRE...?

Vem explorar a função trigonométrica cosseno, identificando fenómenos periódicos e faz o estudo da função $cos(x)$.

O QUE VOU APRENDER?

Funções trigonométricas seno, cosseno e tangente e Fenómenos periódicos

- Reconhecer, analisar e aplicar as funções trigonométricas $sen(x)$, $cos(x)$ e $tg(x)$ na modelação de fenómenos periódicos.
- Identificar fenómenos periódicos e usar os conceitos de período, máximo, mínimo, amplitude e frequência, no estudo dos fenómenos periódicos.
- Determinar valores aproximados de zeros, extremos e outros pontos relevantes, num contexto de resolução de problemas, com recurso à tecnologia gráfica.

COMO VOU APRENDER?

GTA 11: Função seno

GTA 12: Função cosseno

GTA 13: Função tangente

GTA 14: Resolução de problemas

Tema 1: Geometria

Subtema 4: **Funções trigonométricas**

GTA 12: Função Cosseno

Objetivo:

- Reconhecer, analisar e aplicar a função trigonométrica $cos(x)$, na modelação de fenómenos periódicos.

Modalidade de trabalho: pares ou em pequenos grupos.

Recursos e materiais : caderno diário, manual escolar, calculadora gráfica ou *GeoGebra* e *internet*.

TAREFA 1

No teu caderno, **desenha** um referencial o. n. e representa o gráfico da função

$$g: x \rightarrowtail cos(x), \text{ de domínio } \mathbb{R} .$$

Começa por marcar alguns pontos até conseguires prever o aspeto global do gráfico.

1.1. Indica:

1.1.1. O contradomínio;

1.1.2. Valores extremos;

1.1.3. Três maximizantes consecutivos;

1.1.4. Três minimizantes consecutivos;

1.1.5. Três zeros consecutivos.

1.2. Qual é o menor valor positivo, k, para o qual temos que $cos\ (0) = cos\ (k)$? E para $cos\ (x) = cos\ (x + k)$?

Lembra-te,

> Uma função f, diz-se periódica, de período k, quando $f(x) = f(x + k)$, para todos os valores de x e de $x + k$ pertencentes ao seu domínio.

DGE, Coletânea de tarefas das turmas piloto (Matemática A 11.º ano), 2024/2025, página 36.

TAREFA 2

Partilha as tuas respostas à tarefa 1, com as dos teus colegas.
Ainda **tens** dúvidas?

Visualiza o vídeo para conhecer a função trigonométrica $cos(x)$.

Procura no teu manual escolar, no tema da Geometria, o subtema "Função cosseno" e como se faz o estudo de uma função cosseno.

TAREFA 3
Copia para o teu caderno a síntese seguinte:

ETAPA 1

Função trigonométrica cosseno

Chama-se **função cosseno** à função real de variável real que a cada $x \in \mathbb{R}$ faz corresponder $\cos x$, sendo x a medida da amplitude de um ângulo generalizado, em radianos.

A Figura 1 apresenta parte da representação gráfica de uma função $\cos x$.

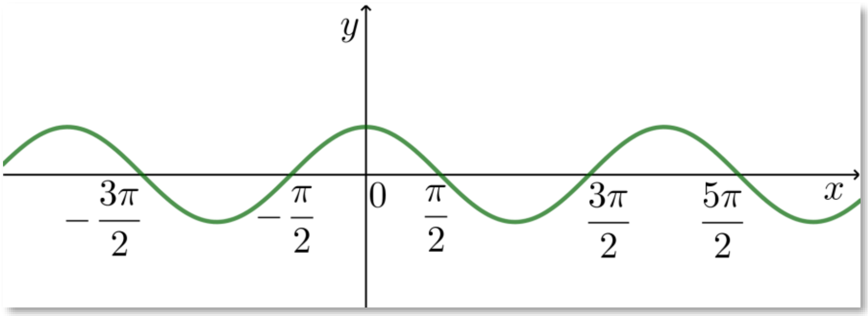
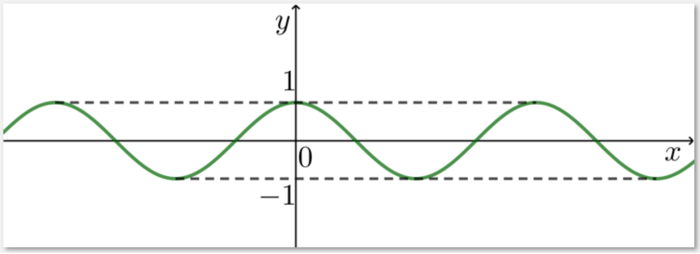


Figura 1 – Gráfico de uma função cosseno

ETAPA 2

Função trigonométrica cosseno: Domínio e contradomínio

Como existe $\cos x$ para qualquer valor real de x, tem-se que o domínio da função é $\mathbb{R}$. Por outro lado, como $-1 \leq cos\ x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ o contradomínio é $[-1, 1]$ (Figura 2).



Domínio: $\mathbb{R}$

Contradomínio: $[-1, 1]$

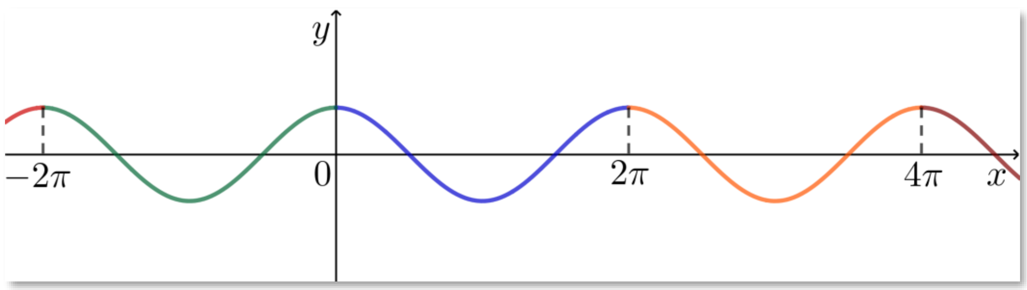
$\boldsymbol{-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}}$

Figura 2 – Gráfico de uma função cosseno

ETAPA 3

Função trigonométrica cosseno: periodicidade

> A função $\cos x$ é uma função periódica de período positivo mínimo $\mathbf{2\pi}$.
>
> $$\cos\,(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{2\pi}) = \cos \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$$



ETAPA 4

Função trigonométrica cosseno: Zeros

Recorda que, recorrendo ao círculo trigonométrico, os zeros da função cosseno são os números reais que correspondem a ângulos cujo lado extremidade está sobre o eixo das ordenadas.

Analisa a Figura 3:

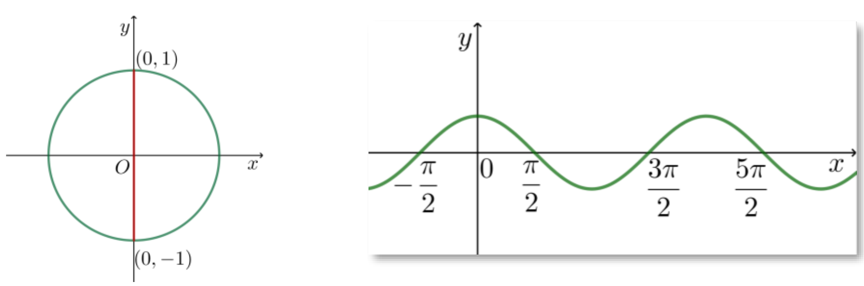
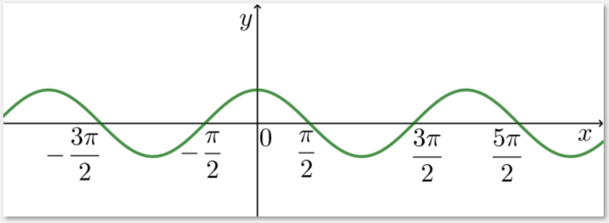


Figura 3 – Círculo trigonométrico e gráfico da função cosseno

Na parte do gráfico da função cosseno encontras os zeros "visíveis".

Podes concluir que,

Os zeros da função $\cos x$ são os números reais da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.



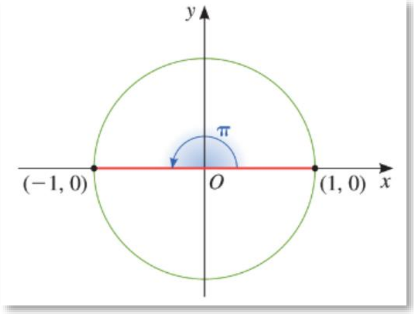
$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \underbrace{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}}_{\text{Expressão geral dos zeros}}$$

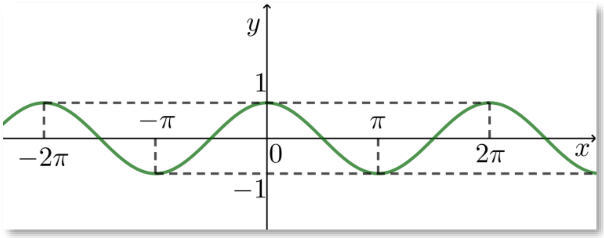
ETAPA 5

Função trigonométrica cosseno: extremos

Como o contradomínio da função $\cos x$ é $[-1, 1]$ esta função admite **máximo absoluto** $\mathbf{1}$ e **mínimo absoluto** $\mathbf{-1}$.

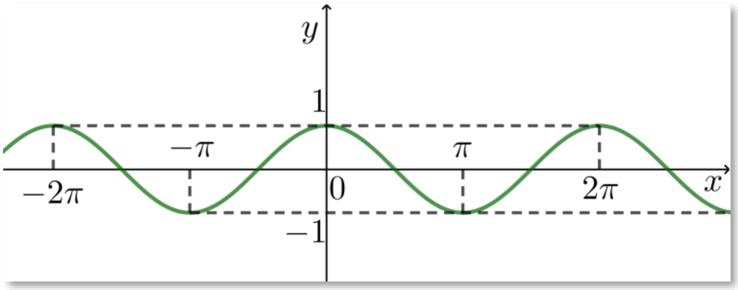
Recorre ao círculo trigonométrico e **localiza** os lados extremidade dos ângulos onde o cosseno é $\mathbf{-1}$ ou $\mathbf{1}$.





Analisa parte do gráfico da função e **localiza** os maximizantes e os minimizantes "visíveis".

Como a função cosseno tem período 2π, tem-se que:



Ou seja, $\boldsymbol{cos\, x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$ **e** $\boldsymbol{cos\, x = -1 \Leftrightarrow = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

ETAPA 6

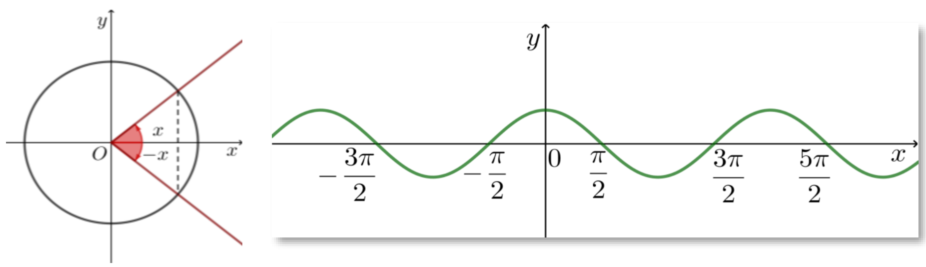
Função trigonométrica cosseno: paridade

A função cosseno é par ou ímpar?

Visualiza o vídeo e **obtém** a resposta à questão anterior.

Em alternativa**, procura** no teu manual, no tema da Geometria, o subtema "Função Cosseno".

Recorda que, a partir do círculo trigonométrico, os cossenos de $-x$ e x são iguais. Tal como visualizaste no vídeo, o gráfico da função cosseno apresenta uma simetria relativamente ao eixo Oy.



Então, conclui-se:

A função $\cos x$ é uma **função par**, porque $\cos(-x) = \cos x\,, \forall x \in \mathbb{R}$

TAREFA 4

Autoavalia a tua aprendizagem. **Justifica** a tua resposta.

Item 1

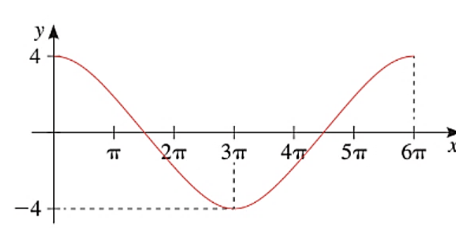
Considera a função real de variável real definida por

$$f(x) = 2 - \cos x$$

a) Determina o contradomínio de f.
b) Escreve uma expressão geral dos maximizantes de f.

Item 2

No referencial o.n. da figura ao lado, está representada parte do gráfico de uma função f definida por $f(x) = a\cos(bx)$, em que a e b são números reais.
Tendo em conta a informação do gráfico, **quais são** os valores de a e de b.



Adaptado de *Dimensões 11, Santillana*

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

TAREFA 1

1.1

1.1.1. O contradomínio de g: $[-1,1]$

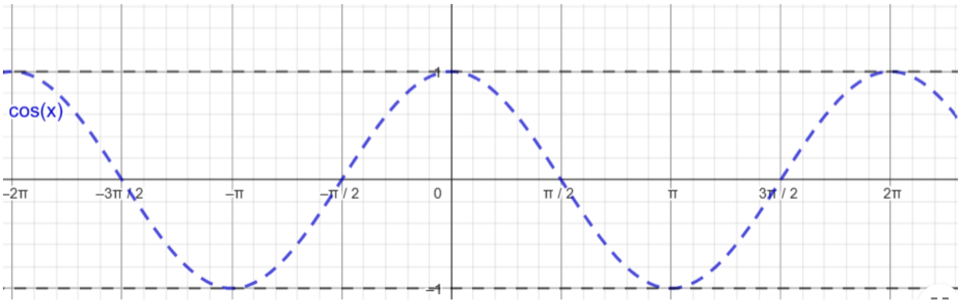
1.1.2. Valores extremos: máximo absoluto $\mathbf{1}$ e mínimo absoluto $-\mathbf{1}$.

1.1.3. Três maximizantes consecutivos: $-2\pi; 0; 2\pi$

1.1.4. Três minimizantes consecutivos: $-\pi; \pi\ e\ 3\pi$

1.1.5. Três zeros consecutivos: $-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$

Proposta de esboço do gráfico da função $g: x \mapsto cos(x)$, de domínio $\mathbb{R}$.



1.2. Qual é o menor valor positivo, k, para o qual temos que cos (0) = cos (k)? E para cos (x) = cos (x + k)?

Se k=2π então, cos (0) = cos (2π)= 1

Igualmente, se k=2π, então cos (x) = cos (x + k), porque a função $\cos x$ é uma função periódica de período positivo mínimo $\mathbf{2\pi}$.

Assim, $\cos\left(\boldsymbol{x}+\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}\right)=\cos\boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$

TAREFA 4

Item 1

a) Sabemos que a função $\cos x$ tem contradomínio $[-1,1]$, então tem-se:

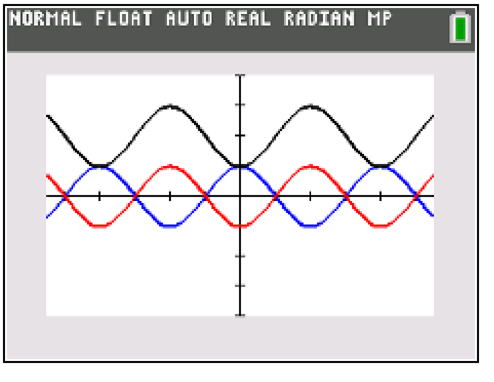
$-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ **(linha azul)**

$1 \geq -\cos x \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$ **(linha vermelha)**

$2+1 \geq 2-\cos x \geq 2-1, \forall x \in \mathbb{R}$ **(linha preta)**

$3 \geq 2-\cos x \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

$D'_f = [1,3]$



b) Como $D'_f = [1, 3]$, o máximo absoluto de f é 3.

Então, pretendem-se os valores de x, para os quais a função atinge o valor máximo.

$f(x) = 3 \Leftrightarrow 2 - \cos x = 3$

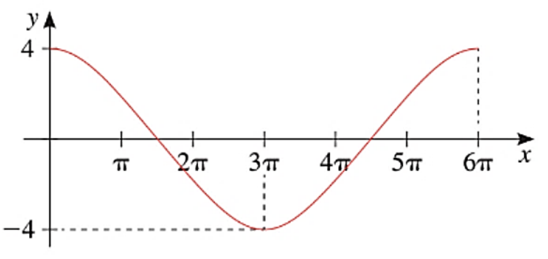
$\Leftrightarrow -\cos x = 3 - 2$

$\Leftrightarrow \cos x = -1$

$\Leftrightarrow \underbrace{x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}_{\text{Expressão geral dos maximizantes}}$

Item 2

$$\boldsymbol{f(x) = a\cos(bx)}$$



O período de f é 6π, então, comparando com o gráfico de $y = \cos x$, houve uma dilatação horizontal de coeficiente 3.

Logo, $b = \frac{1}{3}$

$D'_f = [-4, 4]$ e $f(3\pi) = -4$ então, relativamente ao gráfico de $y = \cos x$, houve uma dilatação vertical de coeficiente 4.

Logo, $a = 4$.

O QUE APRENDI?

Já sabes resolver problemas envolvendo as **relações entre as razões trigonométricas de alguns ângulos**?

Consegues resolver as tarefas sem ajuda?
Ainda tens dúvidas?

Se tiveres dúvidas, **visualiza** a Videoaula 10 onde encontras os exercícios explicados.

Procura, no teu manual escolar, os exercícios resolvidos sobre o tema "**Relações entre as razões trigonométricas de alguns ângulos**". **Analisa-os** e **resolve-os** sozinho. Por fim, **compara** a tua resolução com a do manual e com as dos teus colegas.

Estuda, com um colega de turma, para consolidares a tua aprendizagem.

COMO POSSO COMPLEMENTAR A APRENDIZAGEM?

Explora a sugestão de recursos para complementares a tua aprendizagem ou esclareceres dúvidas.

Em estudoautonomo.dge.mec.pt:

Videoaula 8 | Razões Trigonométricas de ângulos generalizados: resolução de tarefas

Videoaula 9 | Noção de radiano. Medidas de amplitudes de ângulos em radianos |

Outros recursos:

Iave.pt

Khan Academy