GTA | Guião de Trabalho Autónomo n.º 13

DISCIPLINA
11.º ANO

Tema 1: Geometria

Subtema 4: Funções trigonométricas

- PORQUÊ APRENDER SOBRE...?
- O QUE VOU APRENDER?
- COMO VOU APRENDER?
- O QUE APRENDI?
- COMO POSSO COMPLEMENTAR A APRENDIZAGEM?

PORQUÊ APRENDER SOBRE...?

Vem explorar a função trigonométrica tangente, identificando fenómenos periódicos e faz o estudo da função $tg(x)$.

O QUE VOU APRENDER?

Funções trigonométricas seno, cosseno e tangente e Fenómenos periódicos

- Reconhecer, analisar e aplicar as funções trigonométricas $sen(x)$, $cos(x)$ e $tg(x)$ na modelação de fenómenos periódicos.
- Identificar fenómenos periódicos e usar os conceitos de período, máximo, mínimo, amplitude e frequência, no estudo dos fenómenos periódicos.
- Determinar valores aproximados de zeros, extremos e outros pontos relevantes, num contexto de resolução de problemas, com recurso à tecnologia gráfica.

COMO VOU APRENDER?

GTA 11: Função seno

GTA 12: Função cosseno

GTA 13: Função tangente

GTA 14: Resolução de problemas com funções trigonométricas

GTA 13: Função Tangente

Objetivo:

- Reconhecer, analisar e aplicar a função trigonométrica $tg(x)$ na modelação de fenómenos periódicos.

Modalidade de trabalho: individual, a pares ou em pequenos grupos.

Recursos e materiais : caderno diário, manual escolar, calculadora gráfica ou *GeoGebra,* e *internet*.

TAREFA 1

Considera a função que a cada valor de x associa $tg\ x$.

Faz variar o ângulo, assinalado pelo ponto vermelho, no eixo Ox, na apliqueta https://www.geogebra.org/m/j3qxkx6m e **responde** às questões seguintes:

1.1. O domínio da função representada é $\mathbb{R}$?

1.2. Se a amplitude do ângulo tomar valores inferiores, cada vez mais próximos de $\frac{\pi}{2}$, qual é o valor da tangente correspondente?

1.3. E se forem superiores a $\frac{\pi}{2}$, mas cada vez mais próximos de $\frac{\pi}{2}$, o que acontece às imagens?

1.4. Qual é o contradomínio da função?

1.5. O que podes afirmar sobre os zeros e os extremos da função $tg\ x$?

1.6. A função é periódica. Qual te parece ser o seu período?

DGE, Coletânea de tarefas das turmas piloto (Matemática A 11.º ano), 2024/2025, página 36.

TAREFA 2

Compara as tuas respostas à tarefa 1 com as dos teus colegas.
Ainda **tens** dúvidas?

Visualiza o vídeo para conhecer a função trigonométrica $tg(x)$.

Procura no teu manual escolar, no tema da Geometria, o subtema "Função tangente" e como se faz o estudo de uma função tangente.

TAREFA 3

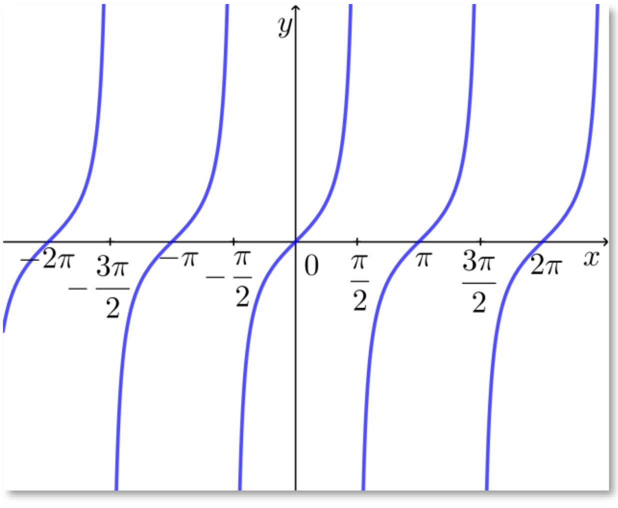
Copia para o teu caderno a síntese seguinte:

ETAPA 1

Função trigonométrica tangente: Domínio e Contradomínio

Chama-se **função tangente** à à função real de variável real de domínio $D = \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, que a cada $x \in$ faz corresponder $tg(x)$, sendo x a medida da amplitude de um ângulo generalizado, em radianos.

O gráfico de uma função tangente está representado na Figura 1.



Domínio: $D = \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Contradomínio: $\mathbb{R}$

Figura 1 – Gráfico de uma função tangente

Nota: Repara que esta função não tem extremos, uma vez que o contradomínio da função tangente é $\mathbb{R}$.

ETAPA 2

Função trigonométrica tangente: Periodicidade

A função tangente é uma função periódica de período positivo mínimo π.

$$\text{tg}(x + \pi) = \text{tg}\, x, \forall x \in D, \forall x \in \mathbb{R}$$

Observa a Figura 2:

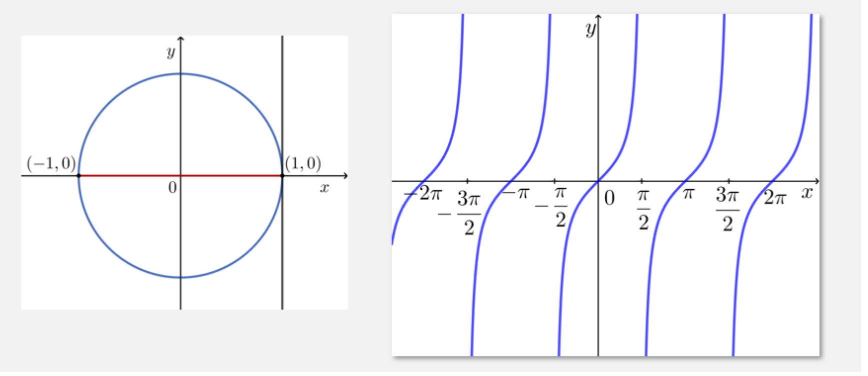
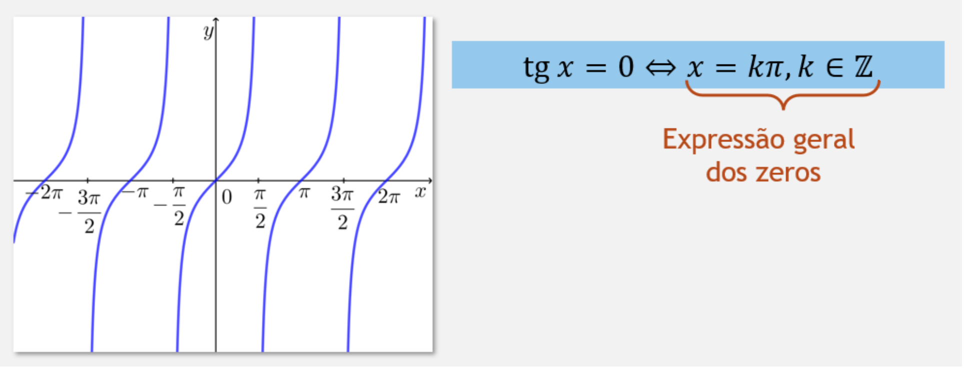


Figura 2 – Círculo trigonométrico e gráfico da função tangente

Na parte do gráfico da função tangente encontras os zeros “visíveis”.

Podes concluir que,

Os zeros da função tangente são os números reais da forma $k\pi, k \in \mathbb{Z}$.



ETAPA 4

Função trigonométrica tangente: Paridade

A função tangente é par ou ímpar?

Recorda que, a partir do círculo trigonométrico (Figura 3), as tangentes de $-x$ e x são simétricas.

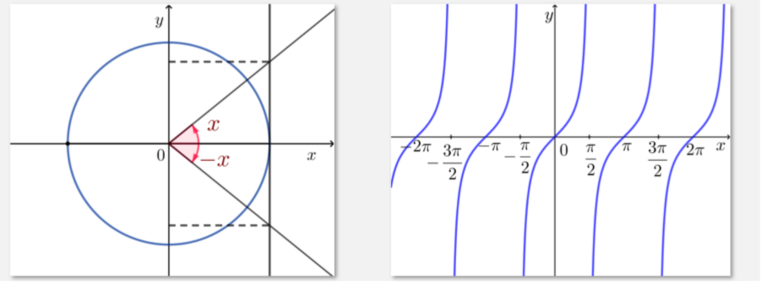


Figura 3 – Círculo trigonométrico e gráfico da função tangente

O gráfico da função tangente apresenta uma simetria relativamente à origem.

Então, conclui-se:

A função tangente é uma **função ímpar** porque $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x\,, \forall x \in D$

TAREFA 4

Autoavalia a tua aprendizagem. **Justifica** a tua resposta.

Item 1

Considera a função real de variável real definida por

$$f(x) = \operatorname{tg}(2x)$$

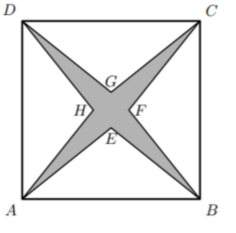
Determina uma expressão geral:

a) dos números reais para os quais a função f não está definida;

b) ***dos zeros de*** f**.**

Item 2

Na figura está representado o quadrado $[ABCD]$.



Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 4$
- $\overline{AE} = \overline{AH} = \overline{BE} = \overline{BF} = \overline{CF} = \overline{CG} = \overline{DG} = \overline{DH}$
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo EAB
- $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$

a) Mostra que a área da região sombreada é dada, em função de x, por:

$$A(x) = 16(1 - \operatorname{tg} x)$$

b) Determina o valor exato da área da região não sombreada para $x = \frac{\pi}{6}$.

c) Existe um valor de x para o qual a área sombreada é 5.

Determina esse valor, arredondado às décimas, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora.

Apresenta os gráficos visualizados assinalando o ponto relevante para a resolução do problema.

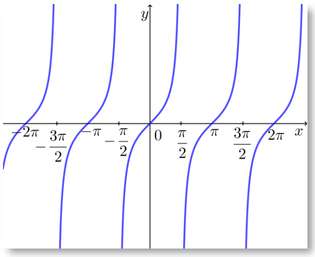
Adaptado de Exame Nacional 12.º ano, 2012, 2.ª fase, IAVE

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

TAREFA 1

1.1. O domínio é $D = \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

1.2.



Domínio: $D = \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Contradomínio: $\mathbb{R}$

Se observares o gráfico anterior, se a amplitude do ângulo tomar valores inferiores, cada vez mais próximos de $\frac{\pi}{2}$, qual é o valor da tangente tende para mais infinito. Lembra-te que a função tangente tem contradomínio $\mathbb{R}$, logo não tem extremos.

1.3. Se $x > \frac{\pi}{2} \wedge x < \pi$, então a tg x vai ter imagens negativas, como podes ver no gráfico anterior.

1.4. A função tangente tem contradomínio $\mathbb{R}$.

1.5. Os zeros da função tangente são os números reais da forma $k\pi, k \in \mathbb{Z}$. A função tangente não tem extremos.

1.6. A função tangente é uma função periódica de período positivo mínimo **π**.

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x, \forall x \in D, \forall x \in \mathbb{R}$$

TAREFA 4

Item 1

a) Considera a função real de variável real definida por:

$$f(x) = \operatorname{tg}(2x)$$

O domínio da função ($\operatorname{tg}(x)$) é $D = \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Então:

$$2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \neq \frac{\frac{\pi}{2}}{2} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

A função f não está definida para os números reais tais que: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

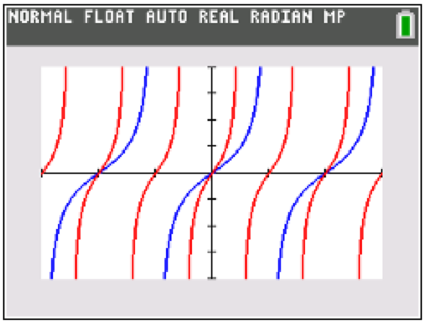
b) A expressão geral dos zeros da função $\operatorname{tg}(x)$ é $k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Então: $2x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

Uma expressão geral dos zeros de f é: $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

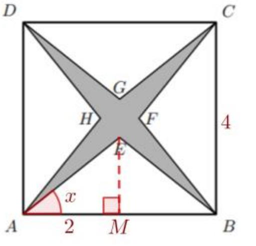
Observa o gráfico, figura ao lado, representado no ecrã de uma calculadora gráfica.
Estão representados os gráficos de duas funções:



Linha azul: $\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Linha vermelha: $\operatorname{tg}(2x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Item 2



a) Como o triângulo $[ABE]$ é isósceles, ao traçar a sua altura relativamente ao lado $[AB]$ obtemos o triângulo retângulo $[AME]$ tal que: $\overline{AM} = 2$.

Então: $\operatorname{tg} x = \frac{\overline{EM}}{2} \Leftrightarrow \overline{EM} = 2\operatorname{tg} x$

e a área do triângulo $[ABE]$ é igual a:

$$\frac{4 \times \overline{EM}}{2} = 2 \times 2\operatorname{tg} x = 4\operatorname{tg} x$$

Como os triângulos $[ABE]$, $[BCF]$, $[CDG]$ e $[ADH]$ são geometricamente iguais, tem-se que:

Área sombreada: $A(x) = 4^2 - 4 \times 4\operatorname{tg} x = 16 - 16\operatorname{tg} x = 16(1 - \operatorname{tg} x)$

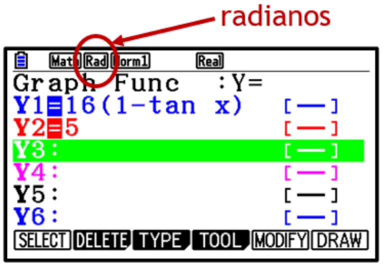
b) A área não sombreada é igual a: $16\operatorname{tg} x$

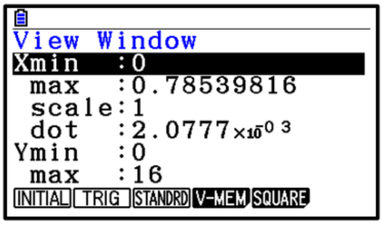
Para $x = \frac{\pi}{6}$, tem-se: $16\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = 16 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$

A área da região não sombreada

c) Determina, com o auxílio da calculadora, um valor aproximado da abcissa do ponto de interseção do gráfico da função A com a reta de equação $y = 5$.

Na calculadora, **ativa** o modo "Radianos" (definição das funções trigonométricas).





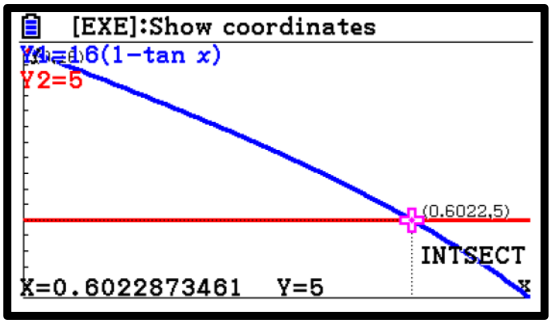
Introduz, as duas funções Y1=$16(1 - \tan x)$ e Y2=5.

Ajusta a janela de visualização da calculadora, tendo como referência o domínio e o contradomínio da função:

Xmin=0 e Xmax=$\frac{\pi}{4}$ (domínio da função)

Ymin=0 e Ymax=16 (a área varia entre 0 e 16 que é a área do quadrado)

O gráfico que **obténs** será semelhante a:



O ponto de interseção **permite** concluir que:

O valor de x , aproximado às décimas, para o qual a área sombreada é igual a 5 é 0,6.

O QUE APRENDI?

Já sabes resolver problemas envolvendo as **relações entre as razões trigonométricas de alguns ângulos**?

Consegues resolver as tarefas sem ajuda?
Ainda tens dúvidas?

Se tiveres dúvidas, **visualiza** a Videoaula 14 onde encontras os exercícios explicados.

Procura no teu manual escolar os exercícios resolvidos sobre o tema "**Relações entre as razões trigonométricas de alguns ângulos**". **Analisa-os** e **resolve-os** sozinho. Por fim, **compara** a tua resolução com a do manual e com as dos teus colegas.

Estuda, com um colega de turma, para consolidares a tua aprendizagem.

COMO POSSO COMPLEMENTAR A APRENDIZAGEM?

Explora a sugestão de recursos para complementares a tua aprendizagem ou esclareceres dúvidas.

Iave.pt

Khan Academy